

*Andrzej GREGORCZYK<sup>1</sup>, Bożena MICHALSKA<sup>2</sup>*

## **ZASTOSOWANIE ANALIZY HARMONICZNEJ DO BADANIA ZMIAN TEMPERATURY POWIETRZA W SZCZECINIE W CYKLU ROCZNYM**

### **APPLICATION OF HARMONIC ANALYSIS TO INVESTIGATION OF AIR TEMPERATURE CHANGES IN SZCZECIN IN ANNUAL CYCLE**

<sup>1</sup>Katedra Agronomii, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie  
ul. Papieża Pawła VI 3, 71-459 Szczecin, e-mail: andrzej.gregorczyk@zut.edu.pl

<sup>2</sup>Katedra Meteorologii i Klimatologii, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie  
ul. Papieża Pawła VI 3, 71-459 Szczecin

**Abstract.** The aim of the paper was to describe statistically changes of air temperature in the area around Szczecin over the years 1991–2000 and to apply for this purpose a time series of harmonic analysis in the annual cycle. On the basis of the original data, mean values of air temperature in Szczecin in individual months, standard errors and extreme values were shown. The mean air temperature in the studied decade (10 years) amounted to 9.03°C. A high significance of annual periodicity of the studied feature was proved. The mathematical model of temperature changes in the function of a successive day of the year was estimated. Very good matching of the harmonic curve to the real data (determination coefficient  $R^2 = 0.993$ ) was recorded.

**Słowa kluczowe:** analiza regresji, model matematyczny, szeregi Fouriera, temperatura powietrza.  
**Key words:** air temperature, Fourier series, mathematical model, regression analysis.

## **WSTĘP**

Podstawowy element klimatu, jakim jest temperatura powietrza, ulega naturalnym zmianom w czasie, a więc wahaniom dobowym, sezonowym, rocznym i wieloletnim, a także zmianom antropogenicznym, wynikającym ze wzrostu zawartości pyłu w atmosferze i gazów szklarniowych lub innych form działalności człowieka (Boryczka i Stopa-Boryczka 2004, Michalska 2009).

Cykliczność naturalna zmian klimatu wywołana jest ruchem obrotowym Ziemi, ruchem Ziemi wokół Słońca oraz zmianą aktywności Słońca (Boryczka 2001), zaś zmiany klimatu związane z czynnikiem antropogenicznym cechuje stała tendencja, czyli trend liniowy (Miller i Miller 2000, Michalska 2009, Mager i in. 2009). Powyższe zjawiska należy ogólnie traktować – w ujęciu statystycznym – jako niestacjonarny proces stochastyczny (Richardson 1981, Ripley 2006).

Wahania sezonowe to zmiany w szeregu czasowym, które są wynikiem zmian zachodzących w przyrodzie w związku z cyklem pór roku. Takie wahania występują przez cały rok, a analizuje się je na podstawie danych miesięcznych (Thornley i France 2007).

Celem tej metodycznej pracy był opis zmian temperatury powietrza w okolicach Szczecina w latach 1991–2000 oraz analiza harmoniczna tego szeregu czasowego w cyklu rocznym, ponieważ należy przypuszczać, że ta metoda całkowicie spełnia kryteria merytoryczne i statystyczne.

## MATERIAŁ I METODY

Badaniom poddano szereg czasowy temperatury powietrza, zawierający średnie miesięczne wartości, zebrane ze stacji meteorologicznej w Szczecinie Dąbiu (53°24', 14°37', 1 m n.p.m.) za lata 1991–2000. Łącznie wykorzystano 120 pierwotnych obserwacji zaczerpniętych z Miesięcznych Przeglądów Agrometeorologicznych (1991–2000).

Do modelowania zmian czynników klimatycznych w cyklu rocznym wykorzystano metodę regresji harmonicznej, opartą na analizie pierwszej harmoniki Fouriera (Wei 2005, Thornley i France 2007). Model tego typu zapisuje się jako:

$$Y(t) = M + a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (1)$$

gdzie:

Y(t) – zmienna czasowa,  
M – wartość stała (średnia),  
a, b – współczynniki regresji,  
t – czas,  
 $\omega$  – częstość:

$$\omega = 2\pi/T \quad (2)$$

gdzie: T – okres wahań.

Powyższe równanie, po przekształceniach, można zapisać także w postaci:

$$Y(t) = M + A \cos [(\omega t) - \varphi] \quad (3)$$

gdzie:

A – amplituda (stanowi największe odchylenie od średniej)

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4)$$

$\varphi$  – faza początkowa (obrazuje czas wystąpienia ekstremum)

$$\varphi = \arctg(b/a) \quad (5)$$

(kątem  $\varphi$  spełnia warunki:  $a = A \cos \varphi$ ,  $b = A \sin \varphi$ ).

Duże wartości współczynników przy funkcji sinus lub cosinus informują o znacznej okresowości w badanym paśmie częstotliwości. Funkcje sinus i cosinus są addytywne, dlatego można zsumować kwadraty ich współczynników dla każdej okresowości i w ten sposób otrzymać tzw. periodogram  $P_k$ :

$$P_k = (a_k^2 + b_k^2) \frac{n}{2} \quad (6)$$

gdzie: n jest długością szeregu czasowego.

Wartości periodogramu – świadczące o ważności danego cyklu – interpretuje się w kategoriach wariancji, odpowiadającej wahaniom o konkretnym okresie.

Aby wykryć ewentualną okresowość, przed przystąpieniem do analizy wyeliminowano z szeregu średnią i trend liniowy, a także wygładzono dane w celu zmniejszenia szumu losowego.

Istotność okresowości zweryfikowano testem kappa Fishera, który podaje przewyższenie maksymalnej wartości periodogramu powyżej wartości średniej (Banaszkiewicz 2003). W niniejszej pracy zastosowano model harmoniczny do opisu zmian – w cyklu rocznym – średniej miesięcznej temperatury powietrza w funkcji czasu, ujętego jako kolejny dzień roku  $t_p = f(N)$ . W cyklu rocznym ( $T = 365$  d) częstość  $\omega = 2\pi/365 = 0,0172$  rad  $\cdot$  d $^{-1}$ , więc

$$t_p(N) = M + a \cos(0,0172N) + b \sin(0,0172N). \quad (7)$$

Po podstawieniu  $X_1 = \cos(0,0172N)$  i  $X_2 = \sin(0,0172N)$  otrzymano model liniowy względem parametrów  $M$ ,  $a$ ,  $b$ .

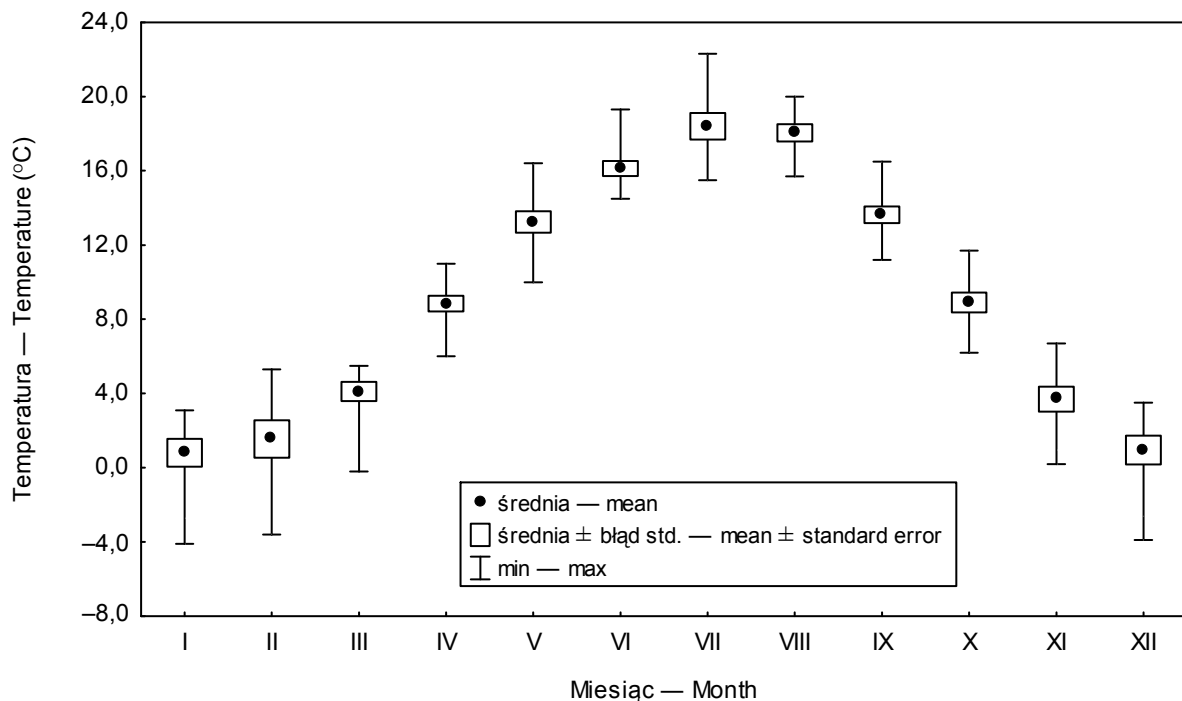
$$t_p(N) = M + a X_1 + b X_2. \quad (8)$$

Istotność wyestymowanych współczynników zweryfikowano testem t-Studenta na poziomie istotności 0,01.

Wszystkie obliczenia wykonano, korzystając z pakietu Statistica<sup>®</sup> 9 (StatSoft, Inc. 2009).

## WYNIKI I DYSKUSJA

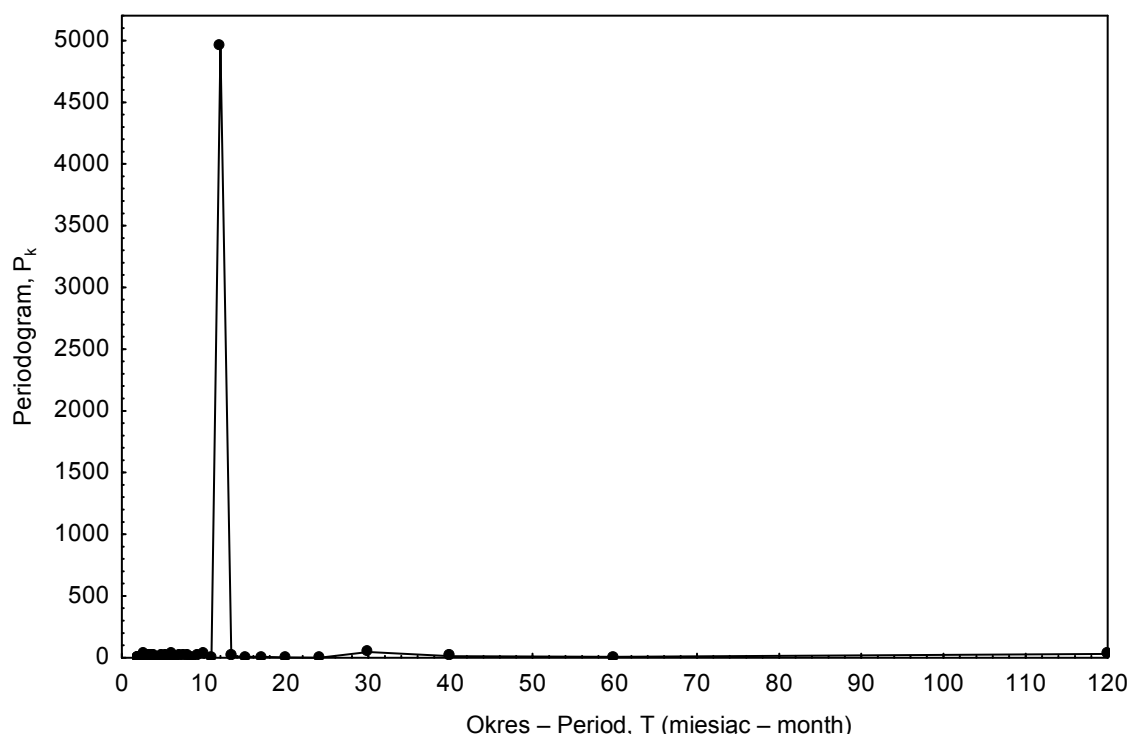
Na rysunku 1 przedstawiono, na podstawie danych oryginalnych, wartości temperatury powietrza w Szczecinie w poszczególnych miesiącach oraz błędy standardowe i wartości ekstremalne.



Rys. 1. Zmiany średniej miesięcznej temperatury powietrza w Szczecinie w latach 1991–2000  
Fig. 1. Mean monthly air temperature changes in Szczecin in the years 1991–2000

Średnia roczna temperatura powietrza wynosiła  $9,03^{\circ}\text{C}$ . Zwraca uwagę duża zmienność badanej cechy w lutym, a przyczyną mogą być znaczne wartości odchylenia standardowego ( $3,18^{\circ}\text{C}$ ) i rozstępu ( $8,9^{\circ}\text{C}$ ) występujące w tym miesiącu. Ogólnie obserwuje się dużą dyspersję temperatury w miesiącach zimowych i mniejszą – w miesiącach letnich.

Na podstawie źródłowej serii pomiarów skonstruowano periodogram, w którym jego wartości wykreślono względem wartości okresu (rys. 2). Okresowość wahań temperatury zawiera się w przedziale od 0 do 120 miesięcy. Badanie rozkładu wartości periodogramu, względem rozkładu wykładniczego, testem Kolmogorowa-Smirnowa d Bartletta dla jednej próby wykazało, że szereg wyjściowy różni się istotnie od szumu losowego. Z własnych obliczeń i zamieszczonego wykresu periodogramu wynika, że największa jego wartość  $P_k = 4952$  – jak należało oczekiwać – odpowiada  $T = 12$  miesięcy = 1 rok = 365 dni, i jest to okres zdecydowanie dominujący.



Rys. 2. Periodogram średniej miesięcznej temperatury powietrza w Szczecinie w latach 1991–2000  
Fig. 2. Periodogram of mean monthly air temperature in Szczecin in the years 1991–2000

Po wykonaniu obliczeń regresji wielorakiej uzyskano równanie:

$$t_p = 9,06 - 8,81 \cos(0,0172N) - 2,26 \sin(0,0172N), \quad (9)$$

a po obliczeniu amplitudy  $A = 9,10$  i fazy początkowej  $\varphi = 0,252$  rad, równanie ma postać:

$$t_p = 9,06 - 9,10 \cos(0,0172N - 0,252), \quad (10)$$

lub

$$t_p(N) = 9,06 - 9,10 \cos[0,0172(N - 17)]. \quad (11)$$

Wyestymowana średnia wartość rocznej temperatury powietrza w Szczecinie wynosi  $9,06^{\circ}\text{C}$  i jest praktycznie identyczna z wartością średniej arytmetycznej ze wszystkich 120 pomiarów ( $9,03^{\circ}\text{C}$ ). Wykres funkcji regresji – na tle średnich wartości miesięcznych – przedstawiono na rysunku 3. Duża wartość współczynnika determinacji ( $R^2 = 0,993$ ) świadczy o bardzo dobrym dopasowaniu krzywej harmoniczej do danych rzeczywistych, którymi są średnie temperatury powietrza z 10 lat obserwacji. Oznacza to, że cykl 12-miesięczny objaśnia w ponad 99% wariację analizowanej temperatury. Przeprowadzone obliczenia analizy wariacji w regresji (wartość testu  $F_{2, 9} = 641,8^{***}$ ) pozwalają uznać, że otrzymany model spełnia kryterium statystyczne.

Znaleziona funkcja harmoniczna (10) ma dwa ekstrema (dla  $N = 17$  i  $N = 197$ ) wynikające z rozwiązań równania:

$$\frac{dt_p(N)}{dN} = 0,157 \sin(0,0172N - 0,252) = 0. \quad (12)$$

W cyklu rocznym, wg równania (12), najmniejsza teoretyczna temperatura powietrza występuje w 17. dniu roku (w styczniu) i wynosi  $t_p(17) = -0,04^{\circ}\text{C}$ , a największa w 197. dniu roku (w lipcu) i jest równa  $t_p(179) = 18,16^{\circ}\text{C}$ .

Wzór (11) może także służyć do wyznaczenia dni  $N_1$  i  $N_2$ , w których wystąpi zadana temperatura powietrza  $t_p$ :

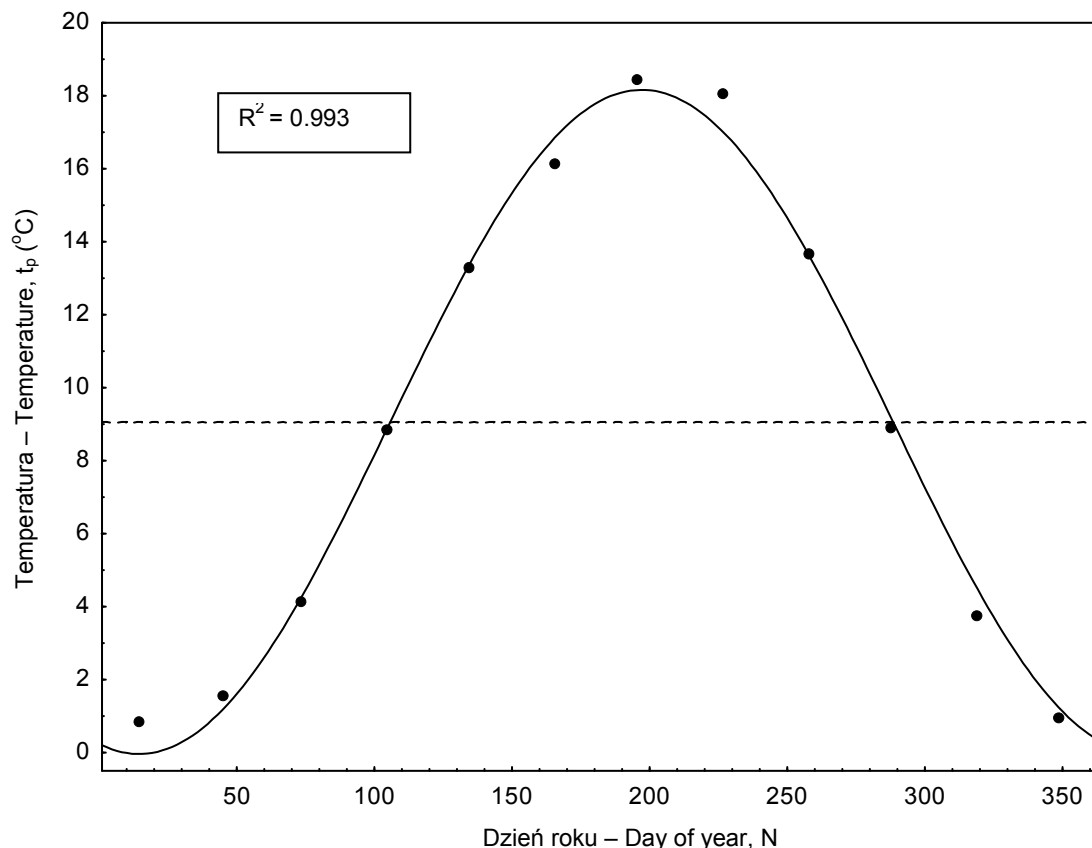
$$N_1 = 17 + \frac{\arccos(9,06 - t_p)}{0,0172}, \quad (13)$$

$$N_2 = 17 + \frac{2\pi - \arccos(9,06 - t_p)}{0,0172}. \quad (14)$$

Przykładowo, średnia temperatura powietrza  $t_p$  równa  $9,0^{\circ}\text{C}$  (rys. 3) powinna wystąpić dwukrotnie: dla  $N_1 = 108$ . dniu roku (w kwietniu) – równanie (13) i dla  $N_2 = 291$ . dniu roku (w październiku) – równanie (14).

Metoda regresji harmoniczej (analizy widmowej) jest dość często stosowana w badaniach meteorologicznych (Żmudzka 1995, Miler i Miler 2000, Boryczka i Stopa-Boryczka 2004, Chabior i Czarnecka 2008). Najczęściej wykrywane są wieloletnie cykle zmian badanych elementów klimatu. Dysponując 60-letnim szeregiem czasowym temperatury powietrza w Szczecinie, Gregorczyk i Michalska (2011) wykazali – jako dominującą – 8,6-letnią okresowość badanej cechy.

Wykorzystanie w niniejszym opracowaniu tylko szeregu Fouriera do modelowania zmienności temperatury powietrza w cyklu rocznym okazało się trafne, co potwierdziły procedury statystyczne. Wyestymowany wielomian trygonometryczny jest funkcją ciągłą i różniczkowalną w całych 12 miesiącach, a jego badanie może dostarczyć wielu interesujących spostrzeżeń, dotyczących na przykład ekstremów czy punktów przegięcia krzywej harmoniczej.



Rys. 3. Harmoniczna funkcja regresji na tle średnich wartości miesięcznej temperatury powietrza w Szczecinie w latach 1991–2000

Fig. 3. Harmonic regression function on the background of mean monthly air temperature in Szczecin in the years 1991–2000

## WNIOSKI

1. Zastosowanie analizy harmonicznej do badania przebiegu temperatury powietrza, w cyklu rocznym, okazało się adekwatną metodą matematyczno-statystyczną. Stwierdzono bardzo dobre dopasowanie krzywej harmonicznej do danych pierwotnych (współczynnik determinacji  $R^2 = 0,993$ ).

2. Z uwagi na krótki okres obserwacji, nie zaleca się wykorzystywania zaproponowanego modelu w praktyce do celów prognostycznych.

## PIŚMIENICTWO

- Banaszkiewicz B.** 2003. Zmienność temperatury powietrza i opadów atmosferycznych w Polsce północnej i jej wpływ na produktywność rolniczą klimatu [w: Zastosowania metod statystycznych w badaniach naukowych II]. Red. I. Jakubowski i I. Wątroba. StatSoft, Kraków, 371–380.
- Boryczka J.** 2001. Klimat Ziemi, przeszłość, terażniejszość, przyszłość. Pr. Stud. Geogr. 29, 55–71.
- Boryczka J., Stopa-Boryczka M.** 2004. Cykliczne wahania temperatury i opadów w Polsce w XIX-XXI wieku. Acta Agrophys. 11 (1), 45–55.
- Chabior M., Czarnecka M.** 2008. The effect of atmospheric circulation on the occurrence of thaws in Pomerania. Acta Agrophys. 3 (1), 21–33.

- Gregorczyk A., Michalska B.** 2011. Zmienność temperatury powietrza w Szczecinie w latach 1949–2008, *Acta Agrophys.* (w druku).
- Mager P., Kasprowicz T., Farat R.** 2009. Change of air temperature and precipitation in Poland in 1966–2006 [w: *Climate change and agriculture in Poland – impact, mitigation and adaptation*]. Red. J. Leśny. *Acta Agrophys.* 169, 19–38.
- Michalska B.** 2009. Variability of air temperature in north western Poland [w: *Environmental aspects of climate change*]. Red. Z. Szwejkowski, UW-M, Olsztyn, 89–107.
- Miesięczny Przegląd Agrometeorologiczny**, Lata 1991–2000. IMGW, Warszawa.
- Miler A.T., Miler M.** 2000. Trendy i okresowości zmian temperatury oraz opadów dla Poznania w latach 1848–2000. *Zesz. Nauk. Bud. i Inż. Środ. Politech. Koszal.* 22, 945–956.
- Richardson C.W.** 1981. Stochastic simulation of daily precipitation, temperature and solar radiation. *Water Resour. Res.*, 17, 182–190.
- Ripley B.** 2006. *Stochastic simulation*. John Wiley. New York.
- StatSoft, Inc.** 2009. STATISTICA® (data analysis software system), version 9.0. [www.statsoft.com](http://www.statsoft.com).
- Thornley J.H.M., France J.** 2007. *Mathematical models in agriculture. Quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences*. CABI Publishing, Wallingford.
- Wei W.W.S.** 2005. *Time series analysis*. John Wiley. New York.
- Żmudzka E.** 1995. Tendencje i cykle zmian temperatury powietrza w Polsce w latach 1951–1990. *Prz. Geofiz.* 40 (2), 129–139.