

Joanna PERZYŃSKA

BUDOWA PROGNOZ ZŁOŻONYCH DLA SEZONOWYCH MODELI PRZYCZYNOWO-OPISOWYCH

BUILDING OF COMBINED FORECASTS FOR SEASONAL CAUSAL- -DESCRIPTIVE MODELS

Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny
w Szczecinie, ul. K. Janickiego 31, 71-270 Szczecin

Abstract. In the article author considers the situation in which several forecasts of the same variable are available. The forecasts was marked on basis of the causal-descriptive models for economic variable having the form of time series with seasonal fluctuations. Author creates new forecast of the same variable – the combined forecast which should be burdened with the smallest error. The author analyses four methods of creating combined forecasts as a weighted average and examines the efficiency of combined forecasts in comparison with individual forecasts. In the majority of the examination cases combined forecasts marked two methods: artificial neural networks and variance-covariance have smaller prediction errors than their component forecasts. It appears that the results of empirical research confirmed the higher efficiency of combined forecast in comparison with individual forecasts.

Słowa kluczowe: prognozowanie, prognozy złożone, sezonowe modele przyczynowo-opisowe, sztuczne sieci neuronowe.

Key words: artificial neural networks, combined forecasts, forecasting, seasonal causal-descriptive models.

WSTĘP

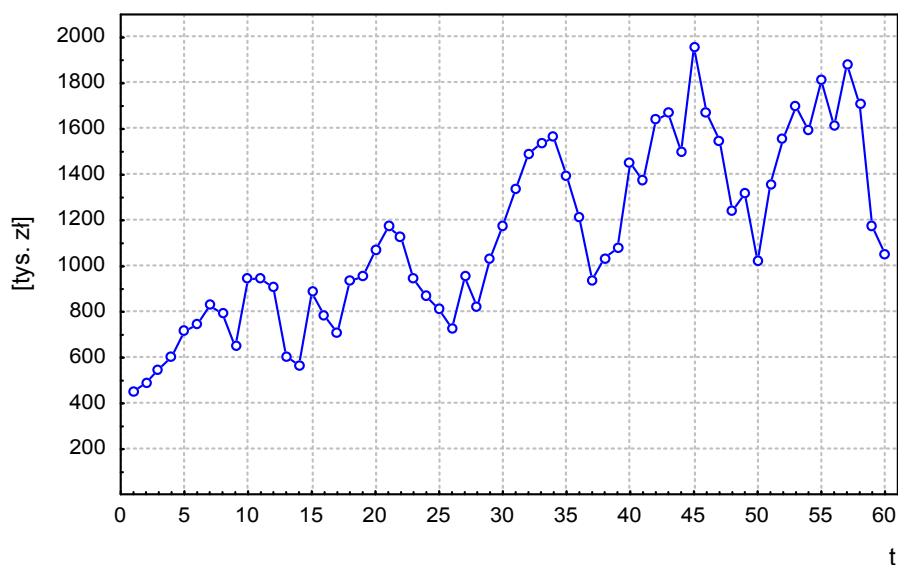
W literaturze ekonometrycznej poświęconej prognozowaniu dominuje podejście polegające na dążeniu do wyboru najlepszej metody predykcji lub najlepszego predyktora. Jednak nie zawsze w sposób jednoznaczny można tego wyboru dokonać, ponieważ oceny mierników własności predykcyjnych modeli mogą być bardzo zbliżone. W wielu przypadkach wybór ten może nosić znamiona arbitralności, a odrzucone prognozy mogą zawierać użyteczne niezależne informacje. W związku z tym pojawia się potrzeba wykorzystania jak największego zasobu dostępnych informacji, co jest możliwe dzięki utworzeniu nowej prognozy – prognozy złożonej będącej liniową kombinacją wszystkich dostępnych prognoz indywidualnych (czyli ich średnią ważoną). Podstawowym zadaniem jest takie wyznaczenie wartości wag, aby otrzymana na ich podstawie prognoza złożona obarczona była mniejszym błędem niż jej prognozy składowe.

W przykładach empirycznych przedstawionych w pracach Perzyńskiej (2005, 2006) wyznaczone zostały prognozy złożone będące liniowymi kombinacjami m prognoz ($m = 2, 3, 4$) dla danych w postaci szeregów czasowych. W niniejszej pracy rozważania zostaną rozszerzone na większą liczbę prognoz indywidualnych i dotyczyć będą zmiennej w postaci szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi. Wśród metod służących do wyznaczania wag prognoz złożonych rozpatrzone zostaną zarówno klasyczne metody statystyczno-

-ekonometryczne, jak i metody wykorzystujące sztuczne sieci neuronowe. Przeprowadzone zostaną empiryczna analiza i porównanie efektywności metod wyznaczania złożonych prognoz zmiennej z wahaniami sezonowymi. Dokładność zbudowanych prognoz złożonych zostanie porównana z dokładnością ich prognoz składowych.

MATERIAŁ

Modelowaniu predyktywnemu i prognozowaniu poddane zostanie kształtowanie się kosztów produkcji elementów budowlanych w oddziale 1 przedsiębiorstwa A ($K1$) w ujęciu miesięcznym. Kształtowanie się badanej zmiennej przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Kształtowanie się zmiennej $K1$

Współczynnik zmienności zmiennej $K1$ wynosi 34,31%. Jego duża wartość oznacza występowanie wyraźnego trendu oraz wahań sezonowych. Graficzna analiza danych empirycznych pozwala wyciągnąć wniosek o multiplikatywnym charakterze wahań sezonowych. Przy powyższym założeniu wyznaczono oceny wskaźników sezonowości zmiennej $K1$, a także zmiennych $SP1$ oraz $PR1$ (przedstawiających odpowiednio sprzedaż oraz produkcję elementów budowlanych w oddziale 1 przedsiębiorstwa A), które posłużą jako zmienne objaśniające w procesie modelowania predyktywnego i prognozowania zmiennej $K1$. Oceny wskaźników sezonowości zmiennych $K1$, $SP1$ oraz $PR1$ przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1. Oceny wskaźników sezonowości zmiennych $K1$, $SP1$ i $PR1$

Miesiąc	Wskaźnik sezonowości [%]		
	$K1$	$SP1$	$PR1$
I	78,35	78,36	57,23
II	70,68	57,14	62,71
III	90,10	94,79	87,21
IV	92,20	103,30	94,01
V	94,96	91,34	100,93
VI	107,09	99,33	106,74
VII	112,27	115,12	123,15
VIII	113,12	123,00	122,37
IX	118,19	133,11	133,02
X	120,28	138,43	126,63
XI	108,18	93,70	100,12
XII	94,57	72,39	85,87

Wyznaczone oceny wskaźników sezonowości zmiennych $K1$, $SP1$ oraz $PR1$ wykazują znaczne zróżnicowanie – różnice między wartościami maksymalną i minimalną wynoszą odpowiednio: 49,6, 81,29 oraz 75,79 punktów procentowych. Zmienne te charakteryzują się silnym natężeniem sezonowości o asymetrycznym rozkładzie ocen wskaźników sezonowości – zmienne $K1$ oraz $SP1$ swoje maksimum sezonowe osiągają w październiku, a minimum sezonowe w lutym, natomiast zmienna $PR1$ swoje maksimum sezonowe osiąga we wrześniu, a minimum sezonowe w styczniu.

METODY

W procesie predykcji zmiennej $K1$ wykorzystane zostaną następujące modele przyczynowo-opisowe:

- model z jedną zmienną objaśniającą ($M1X$):

$$Y_t = \beta_0 + \alpha_1 X_t + U_t \quad (1)$$

- model z jedną zmienną objaśniającą i liniowym trendem ($M2X$):

$$Y_t = \alpha_1 X_t + \beta_0 + \beta_1 t + U_t \quad (2)$$

- model ze stałym parametrem przy zmiennej objaśniającej, z liniowym trendem oraz ze stałymi wahaniami sezonowymi ($M3X$):

$$Y_t = \alpha_1 X_t + \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{k=1}^{12} b_{0k} Q_k + U_t \quad (3)$$

- model ze zmiennymi parametrami przy zmiennej objaśniającej, z liniowym trendem oraz ze stałymi wahaniami sezonowymi ($M4X$):

$$Y_t = \alpha_1 X_t + \sum_{k=1}^{12} a_k X_t Q_k + \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{k=1}^{12} b_{0k} Q_k + U_t \quad (4)$$

- model ze stałym parametrem przy zmiennej objaśniającej, z liniowym trendem oraz ze zmiennymi wahaniami sezonowymi ($M5X$):

$$Y_t = \alpha_1 X_t + \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{k=1}^{12} b_{0k} Q_k + \sum_{k=1}^{12} b_{1k} t Q_k + U_t \quad (5)$$

gdzie:

- t – zmienna czasowa,
- Y – zmienna objaśniana ($K1$),
- X – zmienna objaśniająca ($SP1$ lub $PR1$),
- Q – zmienna zero-jedynkowa.

Prognozy wyznaczone na podstawie powyższych modeli indywidualnych wykorzystane zostaną do budowy prognoz złożonych o postaci:

$$f_{cT} = \lambda_1 f_{1T} + \lambda_2 f_{2T} + \dots + \lambda_m f_{mT} = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{iT} \quad (6)$$

gdzie:

- m – liczba prognoz składowych prognozy złożonej f_{cT} ($m \geq 2$),
- $f_{1T}, f_{2T}, \dots, f_{mT}$ – prognozy składowe wyznaczone na podstawie modeli indywidualnych,
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – wagi prognoz składowych $f_{1T}, f_{2T}, \dots, f_{mT}$.

Wagi prognoz składowych prognozy złożonej (6) zostaną wyznaczone czterema sposobami. Pierwszy sposób polega na przyjęciu wszystkich wag równych, czyli:

$$\lambda_i = \frac{1}{m} \quad (7)$$

Prognoza złożona jest wówczas średnią arytmetyczną prognoz składowych. Wagi określone wzorem (7) spełniają warunki:

$$0 \leq \lambda_j \leq 1 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad (9)$$

Powyższe warunki spełniają również wagi wyznaczone na podstawie wzoru zaproponowanego przez Batesa i Grangera (1969):

$$\lambda_j = \frac{\left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{it}^2 \right)^{-1}}{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{jt}^2 \right)^{-1}} \quad (10)$$

dla:

$$e_{it} = y_t - f_{it} \quad (11)$$

gdzie:

$e_{1t}, e_{2t}, \dots, e_{mt}$ – błędy prognoz składowych $f_{1t}, f_{2t}, \dots, f_{mt}$,

y_t – wartość prognozowanej zmiennej w okresie t ($t = T - v, T - v + 1, \dots, T - 1$).

Do wyznaczenia wag prognoz składowych wykorzystana zostanie również metoda wariancji–kowariancji (Granger i Newbold 1974), zgodnie z którą wariancja błędu prognozy złożonej (6) jest minimalizowana dla wag oszacowanych na podstawie wzoru:

$$\lambda = \frac{1}{|I' \hat{\Omega}^{-1} I|} \hat{\Omega}^{-1} I \quad (12)$$

gdzie:

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m], \quad \hat{\Omega}_{ij} = \frac{1}{v} \sum_{t=T-v}^{T-1} e_{it} e_{jt}$$

Oszacowania wag otrzymane metodą wariancji–kowariancji zawsze spełniają warunek (9). W sytuacji, gdy błędy prognoz są wysoko skorelowane, wartości wag mogą być ujemne lub większe od jedności – wówczas nie wyznacza się prognozy złożonej. W przypadku, gdy współczynnik korelacji pomiędzy błędami prognoz f_{it} i f_{jt} wynosi zero, wzór (12) redukuje się do wzoru (10).

Czwarta metoda wyznaczania wag prognozy złożonej (6) wykorzystuje modele sztucznych sieci neuronowych (Perzyńska 2007). W tym celu konstruuje się jednokierunkową liniową sieć dwuwarstwową, w której pierwsza warstwa służy do wprowadzania wartości wejściowych będących różnicami prognoz indywidualnych:

$$x_{it} = f_{it} - f_{mt} \quad (13)$$

gdzie:

$$i = 1, 2, \dots, m - 1 \quad (m \geq 2).$$

Z warstwy wejściowej wartości x_i przesyłane są połączeniami o wagach λ_i do pojedynczego neuronu drugiej warstwy, w którym po ich przekształceniu przez liniową funkcję potencjału postsynaptycznego oraz tożsamościową funkcję aktywacji wyznaczana jest wartość wyjściowa sieci:

$$z_t = w_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i (f_{it} - f_{mt}) \quad (14)$$

gdzie:

w_0 – wartość obciążenia neuronu wyjściowego.

W procesie uczenia skonstruowanej sieci wyznaczane jest odchylenie wygenerowanej przez sieć wartości z_t od wartości wzorcowej e_{mt} ($t = T - v, T - v + 1, \dots, T - 1$), na podstawie którego obliczana jest wartość wybranej funkcji błędu. W wyniku minimalizacji funkcji błędu wyznaczane są wartości wag $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$. Wagi spełniają warunek (9), zatem:

$$\lambda_m = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \quad (15)$$

WYNIKI I DISKUSJA

Na podstawie wzorów (1)–(5) oszacowano dziesięć modeli przyczynowo-opisowych opisujących kształtowanie się zmiennej $K1$ w zależności od zmiennych $SP1$ lub $PR1$. Okres estymacyjny obejmował 36 obserwacji. Oceny parametrów oszacowanych modeli oraz miary ich dopasowania do danych empirycznych przedstawiono w tab. 2.

Tabela 2. Oceny parametrów oszacowanych modeli przyczynowo-opisowych

Parametr	M1SP1	M2SP1	M3SP1	M4SP1	M5SP1	M1PR1	M2PR1	M3PR1	M4PR1	M5PR1
β_0	244,70	246,27	330,40	445,21	381,34	159,97	37,99	150,66	42,06	232,65
β_1	–	9,17	10,40	12,81	12,28	–	17,94	16,78	16,88	17,22
α_1	0,68	0,51	0,40	0,19	0,31	0,06	0,04	0,04	0,04	0,03
b_{01}	–	–	–27,08	–224,39	–80,09	–	–	–101,73	146,73	–117,3
b_{02}	–	–	–117,15	428,04	–91,53	–	–	–77,15	–150,43	–50,19
b_{03}	–	–	–1,10	–127,29	–50,13	–	–	–47,42	292,29	40,21
b_{04}	–	–	–83,10	365,16	19,72	–	–	–58,38	–54,77	–18,44
b_{05}	–	–	–90,08	78,15	29,57	–	–	–39,80	42,94	42,01
b_{06}	–	–	26,25	67,07	50,26	–	–	–0,46	450,84	64,64
b_{07}	–	–	4,90	35,89	83,97	–	–	40,41	321,33	76,80
b_{08}	–	–	72,68	–239,60	–41,93	–	–	58,45	–249,33	–89,71
b_{09}	–	–	11,62	–369,71	–258,92	–	–	–11,16	–406,02	–293,10
b_{010}	–	–	102,51	–33,38	83,86	–	–	63,67	251,12	78,88
b_{011}	–	–	73,19	–23,17	91,42	–	–	101,90	–766,76	106,41
b_{11}	–	–	–	–	1,42	–	–	–	–	0,18
b_{12}	–	–	–	–	–3,59	–	–	–	–	–3,93
b_{13}	–	–	–	–	2,59	–	–	–	–	–5,58
b_{14}	–	–	–	–	–7,01	–	–	–	–	–3,15
b_{15}	–	–	–	–	–6,65	–	–	–	–	–4,86
b_{16}	–	–	–	–	–0,98	–	–	–	–	–2,78
b_{17}	–	–	–	–	–2,79	–	–	–	–	–0,83
b_{18}	–	–	–	–	6,94	–	–	–	–	8,87
b_{19}	–	–	–	–	14,49	–	–	–	–	15,33
b_{110}	–	–	–	–	2,20	–	–	–	–	1,11
b_{111}	–	–	–	–	–0,51	–	–	–	–	–0,04
a_1	–	–	–	0,32	–	–	–	–	–0,02	–
a_2	–	–	–	–0,98	–	–	–	–	0,01	–
a_3	–	–	–	0,18	–	–	–	–	–0,03	–
a_4	–	–	–	–0,54	–	–	–	–	0,01	–
a_5	–	–	–	–0,11	–	–	–	–	–0,01	–
a_6	–	–	–	0,01	–	–	–	–	–0,03	–
a_7	–	–	–	0,05	–	–	–	–	–0,02	–
a_8	–	–	–	0,33	–	–	–	–	0,02	–
a_9	–	–	–	0,37	–	–	–	–	0,02	–
a_{10}	–	–	–	0,19	–	–	–	–	–0,01	–
a_{11}	–	–	–	0,14	–	–	–	–	0,07	–
R^2	0,83	0,88	0,89	0,86	0,90	0,50	0,89	0,89	0,83	0,92
SE	119,34	97,77	95,29	106,00	87,65	205,41	95,37	92,67	116,76	82,00

Pogrubioną czcionką wyróżniono parametry istotne.

Na podstawie danych zawartych w tab. 2 dokonano weryfikacji oszacowanych modeli: oceny ich dopasowania do danych empirycznych oraz istotności parametrów strukturalnych. Do dalszych badań wybrano siedem modeli: $M1SP1$ – $M3SP1$, $M5SP1$, $M2PR1$, $M3PR1$, $M5PR1$.

Na podstawie wybranych siedmiu modeli wyznaczono prognozy *ex post* zmiennej $K1$ (odpowiednio: f_{1t} , f_{2t} , f_{3t} , f_{4t} , f_{5t} , f_{6t} , f_{7t}) na kolejne 24 okresy ($t = 37, 38, \dots, 60$). Prognozy te stanowiły prognozy bazowe do wyznaczenia wag ($t = 37, 38, \dots, 48$) oraz prognozy składowe prognoz złożonych ($t = 49, 50, \dots, 60$). Średnie absolutne błędy procentowe (MAPE) prognoz bazowych i składowych zestawiono w tab. 3.

Tabela 3. Średnie absolutne błędy procentowe (MAPE) prognoz bazowych oraz prognoz składowych

Prognoza bazowa	MAPE [%]	Prognoza składowa	MAPE [%]
f_{1t}	13,17	f_{1t}	13,55
f_{2t}	7,51	f_{2t}	7,23
f_{3t}	8,30	f_{3t}	9,25
f_{4t}	11,35	f_{4t}	15,85
f_{5t}	10,25	f_{5t}	11,79
f_{6t}	7,98	f_{6t}	10,92
f_{7t}	8,65	f_{7t}	16,33

Prognozy złożone na dwanaście okresów ($t = 49, 50, \dots, 60$) wyznaczono na podstawie wzoru (6) jako kombinacje liniowe m ($m = 2, 3, \dots, 7$). prognoz składowych z tych samych okresów. Dla każdej kombinacji prognoz składowych wyznaczono cztery oceny wartości wag na podstawie metod: średniej arytmetycznej (AM), Batesa i Grangera (BG), wariancji–kowariancji (VC) oraz sztucznych sieci neuronowych (ANN). Do oszacowania wartości wag wykorzystano błędy prognoz bazowych z okresów $t = 37, 38, \dots, 48$. Średnie absolutne błędy procentowe wyznaczonych prognoz złożonych zestawiono w tab. 4–6.

Tabela 4. Średnie absolutne błędy procentowe (MAPE) prognoz złożonych dla $m = 2$ i $m = 5$

Prognoza złożona	MAPE [%]				Prognoza złożona	MAPE [%]			
	AM	BG	VC	ANN		AM	BG	VC	ANN
$f_{1t}-f_{2t}$	6,36	5,97	–	6,06	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}$	7,77	8,21	–	7,03
$f_{1t}-f_{3t}$	7,48	7,54	–	6,11	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{6t}$	8,35	8,52	–	7,09
$f_{1t}-f_{4t}$	10,27	11,10	11,41	7,65	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{7t}$	9,78	9,17	–	7,20
$f_{1t}-f_{5t}$	5,22	5,43	7,37	5,42	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{5t}-f_{6t}$	6,82	7,19	–	6,90
$f_{1t}-f_{6t}$	7,57	7,77	8,60	5,85	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{5t}-f_{7t}$	8,08	8,76	–	7,03
$f_{1t}-f_{7t}$	11,08	12,35	13,51	6,88	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{6t}-f_{7t}$	8,66	9,08	–	8,70
$f_{2t}-f_{3t}$	8,14	8,03	7,03	6,66	$f_{1t}-f_{2t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}$	7,82	8,34	–	6,59
$f_{2t}-f_{4t}$	11,10	10,05	6,36	6,32	$f_{1t}-f_{2t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{7t}$	9,07	9,64	–	7,04
$f_{2t}-f_{5t}$	8,94	8,25	–	7,14	$f_{1t}-f_{2t}-f_{4t}-f_{6t}-f_{7t}$	9,72	9,86	–	7,02
$f_{2t}-f_{6t}$	8,42	7,96	7,22	6,69	$f_{1t}-f_{2t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	8,16	8,86	–	6,66
$f_{2t}-f_{7t}$	11,26	10,28	7,20	7,04	$f_{1t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}$	8,23	9,02	–	9,19
$f_{3t}-f_{4t}$	12,20	11,71	9,05	9,09	$f_{1t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{7t}$	9,67	9,13	–	9,08
$f_{3t}-f_{5t}$	9,38	9,24	9,09	9,16	$f_{1t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{6t}-f_{7t}$	10,37	10,66	–	8,45
$f_{3t}-f_{6t}$	9,72	9,55	9,21	9,25	$f_{1t}-f_{3t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	8,57	9,18	–	9,00
$f_{3t}-f_{7t}$	12,30	11,89	9,16	9,08	$f_{1t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	9,79	10,53	–	10,76
$f_{4t}-f_{5t}$	12,58	12,55	11,44	11,06	$f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}$	10,12	9,65	–	6,99
$f_{4t}-f_{6t}$	12,64	12,77	12,41	12,31	$f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{7t}$	10,90	10,45	–	7,04
$f_{4t}-f_{7t}$	15,35	15,38	15,58	15,31	$f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{6t}-f_{7t}$	10,98	10,59	–	7,11
$f_{5t}-f_{6t}$	11,32	11,35	11,26	11,01	$f_{2t}-f_{3t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	9,89	9,72	–	6,99
$f_{5t}-f_{7t}$	12,23	12,27	12,81	12,41	$f_{2t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	11,10	10,69	–	7,09
$f_{6t}-f_{7t}$	12,59	12,83	13,25	12,83	$f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	11,54	11,39	–	8,99

Tabela 5. Średnie absolutne błędy procentowe (MAPE) prognoz złożonych dla $m = 6$ i $m = 7$

Prognoza złożona	MAPE [%]			
	AM	BG	VC	ANN
$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}$	8,00	8,46	–	6,99
$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{7t}$	9,04	9,19	–	7,11
$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{6t}-f_{7t}$	9,48	9,07	–	7,16
$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	8,28	8,87	–	6,95
$f_{1t}-f_{2t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	9,13	9,62	–	6,88
$f_{1t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	9,48	9,17	–	8,99
$f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	10,73	8,36	–	7,07
$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	9,10	9,49	–	8,30

Tabela 6. Średnie absolutne błędy procentowe (MAPE) prognoz złożonych dla $m = 3$ i $m = 4$

Prognoza złożona	MAPE [%]				Prognoza złożona	MAPE [%]			
	AM	BG	VC	ANN		AM	BG	VC	ANN
$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}$	6,48	7,13	–	6,80	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}$	8,29	8,46	–	7,02
$f_{1t}-f_{2t}-f_{4t}$	8,37	8,19	–	6,79	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{5t}$	6,33	6,91	–	6,99
$f_{1t}-f_{2t}-f_{5t}$	5,41	6,13	–	6,40	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{6t}$	7,06	7,20	–	7,10
$f_{1t}-f_{2t}-f_{6t}$	6,40	6,82	–	6,50	$f_{1t}-f_{2t}-f_{3t}-f_{7t}$	8,74	9,15	–	6,98
$f_{1t}-f_{2t}-f_{7t}$	8,98	9,18	–	8,03	$f_{1t}-f_{2t}-f_{4t}-f_{5t}$	7,44	7,98	–	6,79
$f_{1t}-f_{3t}-f_{4t}$	9,47	9,58	–	8,20	$f_{1t}-f_{2t}-f_{4t}-f_{6t}$	8,22	8,33	–	7,09
$f_{1t}-f_{3t}-f_{5t}$	6,15	6,96	–	7,70	$f_{1t}-f_{2t}-f_{4t}-f_{7t}$	10,21	10,12	–	9,09
$f_{1t}-f_{3t}-f_{6t}$	7,70	8,09	–	8,73	$f_{1t}-f_{2t}-f_{5t}-f_{6t}$	6,28	6,98	–	6,16
$f_{1t}-f_{3t}-f_{7t}$	10,07	10,65	–	9,19	$f_{1t}-f_{2t}-f_{5t}-f_{7t}$	7,83	8,72	–	7,02
$f_{1t}-f_{4t}-f_{5t}$	8,10	8,86	10,76	11,00	$f_{1t}-f_{2t}-f_{6t}-f_{7t}$	8,67	9,08	–	7,09
$f_{1t}-f_{4t}-f_{6t}$	9,37	9,66	10,70	10,72	$f_{1t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}$	8,08	8,82	–	9,02
$f_{1t}-f_{4t}-f_{7t}$	12,03	13,03	13,37	13,27	$f_{1t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{6t}$	9,04	9,18	–	9,21
$f_{1t}-f_{5t}-f_{6t}$	6,39	7,30	8,11	8,01	$f_{1t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{7t}$	11,03	11,39	–	9,09
$f_{1t}-f_{5t}-f_{7t}$	8,71	10,00	11,75	11,70	$f_{1t}-f_{3t}-f_{5t}-f_{6t}$	7,01	7,79	–	7,03
$f_{1t}-f_{6t}-f_{7t}$	9,97	10,84	10,47	10,37	$f_{1t}-f_{3t}-f_{5t}-f_{7t}$	8,54	9,19	–	9,00
$f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}$	10,42	9,19	–	6,66	$f_{1t}-f_{3t}-f_{6t}-f_{7t}$	9,49	9,14	–	9,11
$f_{2t}-f_{3t}-f_{5t}$	8,55	8,29	–	7,20	$f_{1t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}$	8,16	9,06	–	9,50
$f_{2t}-f_{3t}-f_{6t}$	8,48	8,27	–	7,07	$f_{1t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{7t}$	10,13	11,09	11,77	11,56
$f_{2t}-f_{3t}-f_{7t}$	10,48	10,10	–	7,79	$f_{1t}-f_{4t}-f_{6t}-f_{7t}$	10,96	11,60	10,19	10,67
$f_{2t}-f_{4t}-f_{5t}$	10,63	9,89	–	6,64	$f_{1t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	8,65	9,69	–	10,00
$f_{2t}-f_{4t}-f_{6t}$	10,67	9,92	–	6,93	$f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}$	10,20	9,12	–	9,01
$f_{2t}-f_{4t}-f_{7t}$	12,18	11,51	–	6,98	$f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{6t}$	10,23	9,15	–	8,89
$f_{2t}-f_{5t}-f_{6t}$	9,33	8,81	–	7,17	$f_{2t}-f_{3t}-f_{4t}-f_{7t}$	11,36	10,81	–	7,18
$f_{2t}-f_{5t}-f_{7t}$	10,47	10,21	–	7,11	$f_{2t}-f_{3t}-f_{5t}-f_{6t}$	8,90	8,64	–	7,01
$f_{2t}-f_{6t}-f_{7t}$	10,67	10,36	–	6,84	$f_{2t}-f_{3t}-f_{5t}-f_{7t}$	9,96	9,77	–	8,99
$f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}$	11,36	11,01	8,37	9,07	$f_{2t}-f_{3t}-f_{6t}-f_{7t}$	10,13	9,97	–	9,16
$f_{3t}-f_{4t}-f_{6t}$	11,40	11,04	9,03	9,23	$f_{2t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}$	10,42	9,87	–	7,10
$f_{3t}-f_{4t}-f_{7t}$	12,87	12,61	–	8,89	$f_{2t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{7t}$	11,42	10,89	–	7,03
$f_{3t}-f_{5t}-f_{6t}$	9,79	9,65	–	9,09	$f_{2t}-f_{4t}-f_{6t}-f_{7t}$	11,50	11,07	–	9,00
$f_{3t}-f_{5t}-f_{7t}$	11,00	11,07	8,69	8,59	$f_{2t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	10,26	10,09	–	7,20
$f_{3t}-f_{6t}-f_{7t}$	11,36	11,35	–	9,99	$f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}$	10,91	10,73	–	9,12
$f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}$	11,66	11,55	–	10,59	$f_{3t}-f_{4t}-f_{5t}-f_{7t}$	11,97	11,76	–	9,23
$f_{4t}-f_{5t}-f_{7t}$	12,99	12,98	11,53	11,02	$f_{3t}-f_{4t}-f_{6t}-f_{7t}$	12,02	11,90	–	9,03
$f_{4t}-f_{6t}-f_{7t}$	13,06	13,20	12,72	12,69	$f_{3t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	10,62	10,71	–	8,98
$f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	11,42	11,59	–	11,11	$f_{4t}-f_{5t}-f_{6t}-f_{7t}$	12,19	12,20	–	11,09

Analizując wyniki zestawione w tab. 4–6, można zauważyć, że nie we wszystkich przypadkach udało się wyznaczyć prognozy złożone z wagami oszacowanymi metodą wariancji–kowariancji (ponieważ co najmniej jedna z ich wartości nie należała do przedziału $(0,1)$) – dla kombinacji par prognoz są to trzy modele i wraz ze zwiększaniem liczby prognoz składowych ich liczba również rośnie. Gdy oszacowania wartości wag otrzymane metodą VC

nie spełniają wymaganego warunku, może to wynikać z faktu, iż błędy prognoz składowych są wysoko skorelowane – potwierdza się to w przypadku modelu $f_{1t} - f_{2t}$, w którym współczynnik korelacji liniowej wynosi 0,91. Jednak nie zawsze występowanie silnej korelacji musi oznaczać niespełnienie koniecznego założenia – w modelu $f_{2t} - f_{3t}$ jest $\rho = 0,89$, a mimo to wartości wag oszacowane metodą wariancji–kowariancji należą do przedziału $\langle 0,1 \rangle$ i wyznaczona na ich podstawie prognoza złożona obarczona jest błędem mniejszym niż obie jej prognozy składowe.

W modelach, w których wagi otrzymane metodą VC należą do przedziału $\langle 0,1 \rangle$, większość wyznaczonych prognoz złożonych obarczona jest mniejszymi błędami niż wszystkie ich prognozy składowe. W przypadkach, w których błędy prognoz złożonych z wagami oszacowanymi metodą VC są nieznacznie większe od najmniejszego z błędów ich prognoz składowych (ale mniejsze od pozostałych), podobne wyniki uzyskano również dla prognoz złożonych z wagami wyznaczonymi pozostałymi trzema metodami.

Zawsze dodatnie wartości wag należące do przedziału $\langle 0,1 \rangle$ otrzymamy, stosując metodę średniej arytmetycznej oraz metodę Batesa i Grangera. W kilku przypadkach prognozy złożone z oszacowanymi w ten sposób wagami okazały się dokładniejsze od ich prognoz składowych (nawet wówczas, gdy zawiodła metoda wariancji–kowariancji i oszacowane nią wagi były ujemne), jednak w większości modeli prognoz złożonych ich błędy są większe od najmniejszego z błędów prognoz składowych.

W pewnych okresach wiele prognoz składowych jest jednocześnie przeszacowanych lub niedoszacowanych – w takiej sytuacji użycie wyłącznie dodatnich wartości wag może nie wystarczyć do wyznaczenia prognozy złożonej o odpowiednio małym błędzie. Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych pozwala na przyjęcie dowolnych wartości wag, również ujemnych czy większych od jedności. W większości przypadków, w których wagi oszacowano metodą ANN, prognozy złożone obarczone są mniejszymi błędami niż najlepsza z ich prognoz składowych (charakteryzująca się najmniejszym błędem).

Porównując dokładność prognoz złożonych o wagach oszacowanych wszystkimi czterema metodami, można stwierdzić, że najlepsze wyniki uzyskano dla sztucznych sieci neuronowych – w większości rozpatrywanych przypadków błędy prognoz złożonych, w których wagi wyznaczono metodą ANN, były znacznie mniejsze od błędów prognoz złożonych o wagach oszacowanych pozostałymi metodami. Zbliżone wyniki uzyskano przy użyciu metody wariancji–kowariancji – jednak tylko w tych przypadkach, w których wagi spełniały wymagane założenie.

PODSUMOWANIE

Przeprowadzone badania empiryczne potwierdziły dużą przydatność sztucznych sieci neuronowych do wyznaczania wag prognoz złożonych zmiennej z wahaniami sezonowymi – okazały się one bardzo precyzyjnym narzędziem, gdyż w większości rozważanych modeli błędy prognoz złożonych były mniejsze od błędów wszystkich prognoz składowych.

Badania empiryczne potwierdziły wniosek z wcześniejszych rozważań teoretycznych mówiący o tym, że gdy wagi w prognozie złożonej oszacowane są metodą wariancji–kowariancji, to otrzymana na ich podstawie prognoza złożona obarczona jest mniejszym błędem niż jej indywidualne prognozy składowe. Wykazały jednak też, że metoda ta ma ograniczenie, które sprawia, że nie zawsze wyznaczenie prognozy złożonej jest możliwe.

W przypadku rozpatrywanej zmiennej, charakteryzującej się występowaniem silnych wahań sezonowych, liczba modeli, w których nie było możliwe zbudowanie prognoz złożonych z wagami oszacowanymi metodą VC, rośnie wraz ze zwiększaniem się liczby prognoz składowych.

Wagi wyznaczone metodami wariancji–kowariancji oraz sztucznych sieci neuronowych szacowane są w wyniku minimalizacji wariancji błędu prognozy złożonej lub błędu sieci. Jeżeli wartości wag, wyznaczone metodami średniej arytmetycznej oraz Batesa i Grangera, znacznie różnią się od optymalnych oszacowań metodami VC lub ANN, to otrzymane na ich podstawie prognozy złożone obciążone są większymi błędami niż prognozy składowe.

PIŚMIENNICTWO

- Bates J.M., Granger C.W.J.** 1969. The combination of forecasts. *Operat. Res. Quarterly* 40, 451–468.
- Granger C.W.J., Newbold P.** 1974. Forecasting univariate time series and the combination of forecasts. *J. Royal Statist. Soc., Ser. A* 137, 131–165.
- Perzyńska-Wydrych J.** 2005. Zastosowanie prognoz złożonych do prognozowania danych w szeregach czasowych. *Folia Univ. Agric. Stetin., Ser. Oeconomica* 245 (44), 417–422.
- Perzyńska-Wydrych J.** 2006. Uogólnione metody budowy prognoz złożonych. *Folia Univ. Agric. Stetin., Ser. Oeconomica* 249 (45), 187–192.
- Perzyńska J.** 2007. Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do wyznaczania prognoz złożonych, *Folia Univ. Agric. Stetin., Ser. Oeconomica* 258 (49), 137–148.
- Zawadzki J.** 1996. Modelowanie predyktywne i prognozowanie zjawisk w skali mikroekonomicznej. Szczecin, Wydaw. USzczec.