

Joanna Perzyńska

MODYFIKACJA METODY WARIANCJI–KOWARIANCJI WYZNACZANIA WAG PROGNOZY ZŁOŻONEJ

THE MODIFICATION OF VARIANCE–COVARIANCE METHOD OF ESTIMATE WEIGHTS OF COMBINED FORECAST

Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
ul. Klemensa Janickiego 31, 71-270 Szczecin, e-mail: Joanna.Perzynska@zut.edu.pl

Summary. In the article author considers the situation in which several forecasts of the same variable are available. The main problem is to select the best forecast. It enables us to create new forecast – the combined forecast with the smallest variance of prediction error. The author analyses two econometric methods of creating combined forecasts as a weighted average and their properties. The author makes the suggestion of modification of variance–covariance method and examines its efficiency in comparison with two basic methods.

Słowa kluczowe: prognozowanie, prognozy złożone, szereg czasowy.

Key words: combined forecasts, forecasting, time series.

WSTĘP

W sytuacji, gdy dostępne są różne prognozy tej samej zmiennej, wyznaczone na podstawie modeli indywidualnych, można stworzyć prognozę złożoną, będącą ich średnią arytmetyczną prostą lub ważoną. Podstawowym zadaniem jest takie wyznaczenie wartości wag, aby otrzymana prognoza złożona miała większą dokładność niż jej prognozy składowe.

Rozważania teoretyczne oraz badania empiryczne wskazują, że gdy wagi prognozy złożonej wyznaczone są metodą wariacji–kowariancji, otrzymana prognoza ważona obarczona jest mniejszym błędem niż najlepsza z indywidualnych prognoz składowych. Ponieważ wagi wyznaczone metodą wariacji–kowariancji często nie spełniają założeń niezbędnych do stworzenia prognozy złożonej, w niniejszym artykule zaproponowano jej modyfikację, opartą na zauważonej przez autorkę własności. Ilustracją rozważań o charakterze teoretycznym będzie przykład empiryczny, w którym dokładność *ex post* prognoz złożonych zostanie porównana z dokładnością prognoz składowych.

METODY

Niech $f_{1T}, f_{2T}, \dots, f_{mT}$ będą różnymi, nieobciążonymi prognozami zmiennej Y na okres T . Prognoza złożona f_{cT} zmiennej Y na okres T jest kombinacją liniową m prognoz indywidualnych:

$$f_{cT} = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{iT} \quad (1)$$

przy warunkach:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad (2)$$

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad (3)$$

gdzie:

$$m \geq 2, \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Wariancja błędu prognozy złożonej (1) jest minimalizowana dla wag λ_i oszacowanych metodą wariancji–kowariancji:

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{1}' \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1} \mathbf{1}} \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1} \mathbf{1} \quad (4)$$

dla:

$$\hat{\Omega}_{ij} = \frac{1}{v} \sum_{t=T-v}^{T-1} e_{it} e_{jt} \quad (5)$$

gdzie:

$$\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m]', \\ i, j = 1, 2, \dots, m, \\ e_{it} - \text{błąd prognozy } f_{it}.$$

W przypadku, gdy co najmniej jedna z wartości wag λ_i nie należy do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, można zastosować zbliżoną formułę (Bates i Granger 1969), w której przyjmuje się założenie o zerowej korelacji pomiędzy błędami prognoz składowych:

$$\lambda_i^* = \frac{\left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{it}^2 \right)^{-1}}{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{jt}^2 \right)^{-1}} \quad (6)$$

Zauważmy, że wagi wyznaczone na podstawie wzoru (6) charakteryzuje przedstawiona poniżej własność.

Dla dowolnych ustalonych wartości i oraz k ($i, k = 1, 2, \dots, m$), przy założeniu, że $\lambda_k^* \neq 0$, spełniony jest warunek:

$$\bigwedge_{m \geq 2} \frac{\lambda_i^*}{\lambda_k^*} = \text{const} \quad (7)$$

Dowodem jest zależność:

$$\frac{\lambda_i^*}{\lambda_k^*} = \frac{\left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{it}^2 \right)^{-1}}{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{jt}^2 \right)^{-1}} \cdot \frac{\left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{kt}^2 \right)^{-1}}{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{jt}^2 \right)^{-1}} = \frac{\left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{it}^2 \right)^{-1}}{\left(\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{kt}^2 \right)^{-1}} = \frac{\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{kt}^2}{\sum_{t=T-v}^{T-1} e_{it}^2}$$

co oznacza, że wartość rozważanego ilorazu jest stała niezależnie od wartości m .

Z przedstawionej własności wynika, że dysponując oszacowaniami wartości wag λ_i^* dla co najmniej 2 prognoz złożonych będących liniowymi kombinacjami par prognoz, można wykorzystać je bezpośrednio – bez ponownego stosowania wzoru (6) – do wyznaczenia

oszacowań wag λ_i^* prognoz złożonych, będących kombinacjami większej liczby prognoz składowych, w następujący sposób:

1. Spośród wszystkich dostępnych kombinacji par prognoz wybieramy te, w których powtarza się prognoza f_{kT} – jest to $(m-1)$ par f_{kT}, f_{iT} , gdzie: $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $i \neq k$, $m \geq 3$.

2. Każdej kombinacji prognoz f_{kT}, f_{iT} odpowiada para wag o wartościach $1 - \lambda_{i,k}^*, \lambda_{i,k}^*$, dla której, gdy $\lambda_{i,k}^* \neq 1$, obliczamy iloraz:

$$a_{ki} = \frac{\lambda_{i,k}^*}{1 - \lambda_{i,k}^*} \quad (8)$$

3. Na podstawie przedstawionej wyżej własności również:

$$a_{ki} = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_k^*} \quad (9)$$

gdzie:

λ_i^*, λ_k^* – wagi prognoz f_{iT}, f_{kT} w prognozie złożonej będącej kombinacją liniową m prognoz indywidualnych $f_{1T}, f_{2T}, \dots, f_{mT}$.

Przekształcając (9), otrzymujemy:

$$\lambda_i^* = a_{ki} \lambda_k^* \quad (10)$$

4. W prognozie złożonej z m prognoz spełniony jest warunek (2), mamy więc:

$$\lambda_k^* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \lambda_i^* = 1$$

$$\lambda_k^* + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m a_{ki} \lambda_k^* = 1$$

$$\lambda_k^* (1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m a_{ki}) = 1$$

$$\lambda_k^* = \frac{1}{1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m a_{ki}} \quad (11)$$

W przedstawiony w powyższym schemacie sposób, na podstawie wzorów (8), (10) oraz (11), można wyznaczyć oszacowania wartości wag λ_i^* oraz λ_k^* – bez stosowania wzoru (6) – w prognozie złożonej z m prognoz indywidualnych.

Na podstawie wyżej przedstawionej własności można sformułować kolejny wniosek: Dysponując oszacowaniami wartości wag określonych wzorem (6) dla prognozy złożonej będącej liniową kombinacją co najmniej 3 prognoz, można wykorzystać je bezpośrednio – bez ponownego stosowania wzoru (6) – do wyznaczenia oszacowań wag prognoz złożonych będących kombinacjami par prognoz w następujący sposób:

1. Niech λ_i^*, λ_k^* będą wagami prognoz f_{iT} oraz f_{kT} w prognozie złożonej będącej kombinacją liniową m prognoz indywidualnych, gdzie: $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $i \neq k$, $m \geq 3$.

2. Przy założeniu, że $\lambda_k^* \neq 0$, obliczamy wartość a_{ki} – ilorazu wag λ_i^* oraz λ_k^* na podstawie wzoru (9).

3. Na podstawie przedstawionej wyżej własności otrzymana wartość a_{ki} jest równa ilorazowi wag $1 - \lambda_{i,k}^*$ oraz $\lambda_{i,k}^*$ w prognozie złożonej będącej kombinacją liniową pary prognoz indywidualnych f_{iT} oraz f_{kT} . Przekształcając wzór (8), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\lambda_{i,k}^* &= a_{ki} (1 - \lambda_{i,k}^*) \\ \lambda_{i,k}^* &= \frac{a_{ki}}{1 + a_{ki}}\end{aligned}\quad (12)$$

Stąd:

$$1 - \lambda_{i,k}^* = \frac{1}{1 + a_{ki}}\quad (13)$$

W przedstawiony w powyższym schemacie sposób, na podstawie wzorów (9), (12) oraz (13), można, bez stosowania wzoru (6), wyznaczyć oszacowania wartości wag w prognozie złożonej z 2 prognoz indywidualnych.

Wartości wag interpretować można jako procentowe udziały odpowiadających im prognoz składowych w prognozie złożonej. Spełnienie wyżej opisanej własności oznacza, że stosunek udziałów pary dowolnych ustalonych prognoz indywidualnych w prognozie złożonej jest stały we wszystkich prognozach złożonych z wagami λ_i^* , niezależnie od liczby ich prognoz składowych. Proponowana modyfikacja metody wariancji–kowariancji polega na zachowaniu stałości tego stosunku dla wybranych prognoz złożonych z wagami otrzymanymi na podstawie wzoru (4). W przypadkach, w których oceny wartości wag λ_i , uzyskane za pomocą metody wariancji–kowariancji, nie spełniają warunku (3), można wyznaczyć je sposobami przedstawionymi w powyższych schematach, wstawiając do wzorów (10) i (11) oraz (12) i (13) w miejsce λ_i^* wybrane wagi λ_i spełniające założenie (2) oraz:

$$0 < \lambda_i < 1\quad (14)$$

MATERIAŁ, WYNIKI I DYSKUSJA

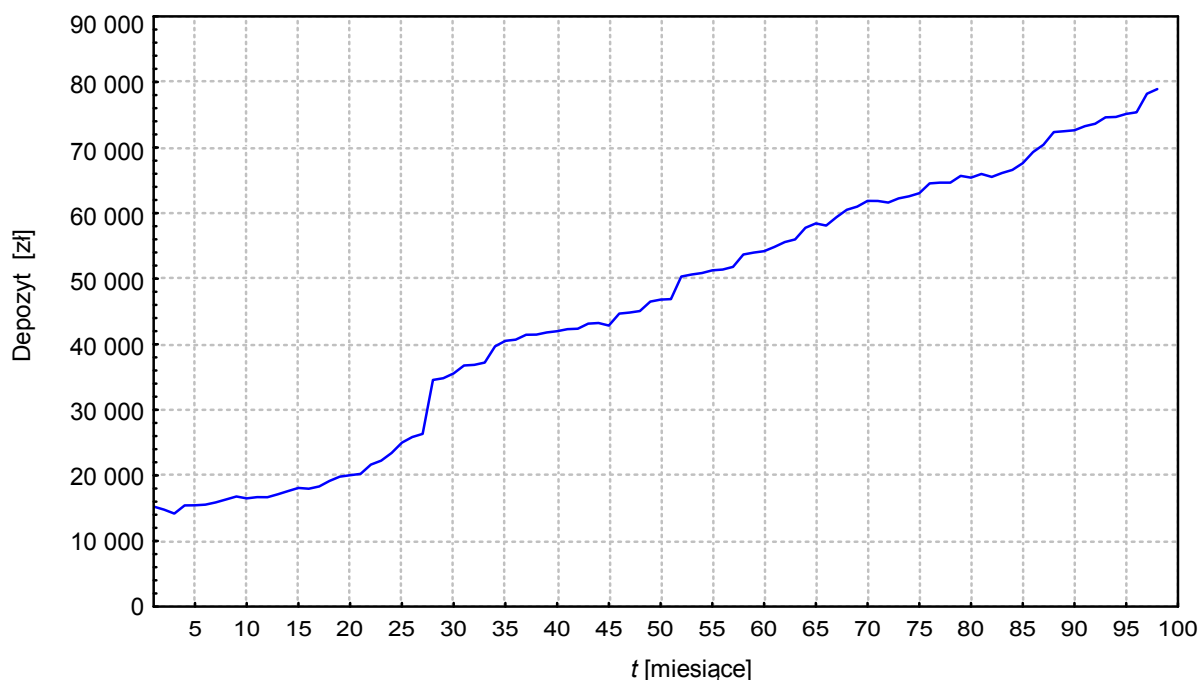
Modelowaniu predyktywnemu i prognozowaniu poddano kształtowanie się stanów depozytów terminowych w banku X . Kształtowanie się danych empirycznych przedstawiono na rys.1.

W procesie predykcji wykorzystano modele szeregu czasowego. Okres estymacyjny obejmował 89 obserwacji. Na podstawie 4 modeli indywidualnych, o najlepszych własnościach predyktywnych:

- z liniową funkcją trendu (ML),
- z kwadratową funkcją trendu (MK),
- z wykładniczą funkcją trendu stopnia drugiego (MWK),
- z wykładniczą funkcją trendu stopnia trzeciego (MWT).

wyznaczono prognozy *ex post* (odpowiednio: $f_{1t}, f_{2t}, f_{3t}, f_{4t}$) na 9 kolejnych okresów. W następnych badaniach prognozy te posłużyły do wyznaczenia wag oraz prognoz złożonych. Do oszacowania wartości wag wykorzystano prognozy indywidualne z okresów $t = 90, 91, \dots, 95$, natomiast prognozy z okresów $t = 96, 97, 98$ stanowiły prognozy składowe pro-

gnoz złożonych. Średnie absolutne błędy procentowe MAPE (ang. *mean absolute percentage error*) prognoz indywidualnych przedstawiono w tab. 1.



Rys. 1. Kształtowanie się stanów depozytów terminowych w banku X

Tabela 1. Średnie absolutne błędy procentowe prognoz indywidualnych

Prognoza	MAPE [%] (dla $t = 90, 91, \dots, 95$)	MAPE [%] (dla $t = 96, 97, 98$)
f_{1t}	3,15	2,62
f_{2t}	1,12	2,13
f_{3t}	7,47	12,01
f_{4t}	11,45	15,79

Rozpatrzono 11 przypadków prognoz złożonych będących średnimi ważonymi 2, 3 oraz 4 indywidualnych prognoz składowych. Dla każdej kombinacji prognoz składowych wyznaczono ich wagi za pomocą trzech metod: Batesa-Grangera (BG), wariancji–kowariancji (VC) oraz jej modyfikacji (MOD) opartej na wyżej opisanej własności. Otrzymane oszacowania wartości wag przedstawiono w tab. 2.

Analizując wyniki zestawione w tab. 2, można zauważyć, że w 6 przypadkach wartości wag, uzyskane metodą wariancji–kowariancji, nie należały do przedziału $\langle 0,1 \rangle$. Nie można było zatem na ich podstawie wyznaczyć prognoz złożonych. Dla tych modeli zastosowano więc zaproponowaną modyfikację metody VC. Wartości a_{ki} , określone wzorami (8) oraz (9), wyznaczono na podstawie wybranych kombinacji prognoz składowych, dla których oszacowania wag, otrzymanych na podstawie wzoru (4), spełniały założenie (14). Dodatkowe kryterium wyboru stanowił warunek, aby w wybranych modelach w dowolnych układach kombinacji występowały wszystkie prognozy indywidualne; wybrano oszacowania wag dla prognoz złożonych f_{13} oraz f_{124} .

W celach porównawczych wyznaczono również prognozy złożone będące prostymi średnimi arytmetycznymi (AM), w których wszystkie wagi są jednakowe. Średnie absolutne błędy procentowe otrzymanych prognoz złożonych przedstawiono w tab. 3.

Tabela 2. Oszacowania wartości wag

Prognoza złożona	Wagi		
	VC	MOD	BG
f_{12}	0,002	0,184	0,056
	0,998	0,816	0,944
f_{13}	0,702	0,702	0,847
	0,298	0,298	0,153
f_{14}	>1	0,787	0,932
	<0	0,213	0,068
f_{23}	>1	0,912	0,989
	<0	0,088	0,011
f_{24}	>1	0,942	0,995
	<0	0,058	0,005
f_{34}	>1	0,610	0,714
	<0	0,390	0,286
f_{123}	0,636	0,172	0,055
	0,104	0,755	0,935
	0,260	0,073	0,010
f_{124}	0,177	0,177	0,055
	0,775	0,775	0,940
	0,048	0,048	0,005
f_{134}	0,735	0,590	0,792
	0,201	0,250	0,143
	0,064	0,160	0,065
f_{234}	>1	0,863	0,985
	<0	0,083	0,010
	<0	0,054	0,005
f_{1234}	>1	0,164	0,055
	>1	0,720	0,931
	<0	0,071	0,010
	<0	0,045	0,004

f_{ij} – prognoza złożona, której prognozami składowymi są prognozy f_i oraz f_j .

Analizując informacje zawarte w tab. 2 i 3, można zauważyć, że w 6 przypadkach, w których wagi wyznaczone metodą VC nie spełniały założenia (3), w związku z czym nie można było na ich podstawie wyznaczyć prognoz złożonych. Wagi wyznaczone metodą zmodyfikowaną zawsze je spełniały, generując prognozy złożone o błędach mniejszych niż indywidualne prognozy składowe.

W pozostałych 3 modelach (poza wybranymi i niepodlegającymi modyfikacji f_{13} oraz f_{12t}), w których istniały nieujemne oszacowania wartości wag metodą VC, dla obu metod VC i MOD uzyskano zbliżone wyniki, a wszystkie prognozy złożone charakteryzowały się błędami mniejszymi niż indywidualne prognozy składowe.

Tabela 3. Średnie absolutne błędy procentowe prognoz złożonych

Prognoza złożona	MAPE [%]			
	AM	VC	MOD	BG
f_{12}	2,04	2,08	1,76	1,98
f_{13}	4,70	2,00	2,00	2,26
f_{14}	6,32	–	2,07	2,24
f_{23}	7,07	–	1,99	2,23
f_{24}	7,69	–	1,87	2,20
f_{34}	12,63	–	11,40	13,64
f_{123}	3,84	1,97	1,90	2,01
f_{124}	3,68	1,85	1,85	2,00
f_{134}	6,97	2,00	2,20	1,84
f_{234}	8,55	–	2,01	2,31
f_{1234}	5,19	–	2,00	2,04

Pogrubioną czcionką wyróżniono błędy prognoz złożonych mniejsze od błędów ich prognoz składowych.

Porównując przeciętne względne błędy prognoz złożonych z wagami wyznaczonymi za pomocą metod VC oraz BG, można zauważyć, że w kilku przypadkach nieuwzględnienie korelacji prognoz składowych nieznacznie pogorszyło dokładność prognoz złożonych.

Porównując dokładność prognoz złożonych, wyznaczonych za pomocą wszystkich 4 metod, można stwierdzić, że zdecydowanie najmniejszą dokładnością charakteryzują się prognozy będące prostymi średnimi arytmetycznymi, w których *a priori* przyjmuje się wszystkie wagi równe.

PODSUMOWANIE

W sytuacji, gdy dostępne są różne prognozy tej samej zmiennej, można utworzyć prognozę złożoną, będącą ich średnią ważoną. Wagi prognozy złożonej wyznaczyć można metodą wariancji–kowariancji; otrzymana na ich podstawie prognoza ważona obarczona jest mniejszym błędem niż indywidualne prognozy składowe. Ponieważ wagi wyznaczone metodą VC często nie spełniają założeń niezbędnych do stworzenia prognozy złożonej, w niniejszym artykule zaproponowano jej modyfikację, opartą na zauważonej własności.

Porównując dokładność prognoz złożonych z wagami wyznaczonymi metodą wariancji–kowariancji oraz jej modyfikacji, można zauważyć, że w większości przypadków lepsze wyniki uzyskano dla zaproponowanej modyfikacji. Należy podkreślić, że sprawdza się ona w sytuacji, gdy zawodzi metoda podstawowa – zawsze generuje wagi spełniające założenie o przynależności do przedziału $\langle 0,1 \rangle$, a utworzone na jej podstawie prognozy złożone obarczone są błędami mniejszymi niż błędy ich prognoz składowych.

PIŚMIENNICTWO

Bates J.M., Granger C.W.J. 1969. The combination of forecasts. *Operat. Res. Quart.* 40, 451–468.

Granger C.W.J., Newbold P. 1974, Forecasting univariate time series and the combination of forecasts. *J. Royal Statist. Soc., Ser. A* 137, 131–165.