

Henryk Marjak

OCENA EFEKTYWNOŚCI WYBRANYCH NIEPARAMETRYCZNYCH MODELI WYCENY OPCJI

ASSESSMENT OF THE EFFECTIVENESS OF SELECTED NONPARAMETRIC OPTION PRICING MODELS

Katedra Analizy Systemowej i Finansów, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
ul. K. Janickiego 31, 71-270 Szczecin, e-mail: henryk.marjak@zut.edu.pl

Summary. In the paper were presented researches on effectiveness of non-parametric option pricing models. In the article were used models based on neural networks optimized using a flexible back propagation algorithm (RPROP) and models based on support vectors. Graphically shows the changes of errors, depending on the moneyness and maturity of the option. In the paper were researched problems attached

Słowa kluczowe: regresyjne wektory nośne, sieci neuronowe, wycena opcji.

Key words: neural networks, option pricing, support vector regression.

WPROWADZENIE

Możliwość wyceny i prognozowania opcji umożliwia praktykom inwestującym na rynkach giełdowych zredukowanie ryzyka finansowego. O ile określenie ceny opcji polega na wyznaczeniu uczciwej ceny bieżącej, to prognozowanie służy oszacowaniu wartości przyszłej ceny opcji bez znajomości parametrów wpływających na tę cenę (zmiennosc, instrument bazowy). Prawdopodobieństwo spadku lub wzrostu cen na giełdzie zwiększa się wraz ze wzrostem wartości zmienności. Zmienność jest miarą ruchu cen używaną do określania ryzyka. Można rozróżnić trzy rodzaje zmienności: przyszłą, historyczną i implikowaną. Zmienność przyszła jest wartością szacowaną w danej chwili, a dotyczy okresu przyszłego. Zmienność historyczna to wartość obliczana na podstawie notowań od pewnego okresu w przeszłości do chwili obecnej. Zmienność implikowana to wartość obliczona za pomocą modelu Blacka-Scholesa na podstawie zawartych transakcji opcjami, gdzie przyjmuje się zmienność jako wartość niewiadomą.

Pojęcie „wycena” opcji wskazuje na naukowy proces określenia teoretycznej neutralnej i uczciwej ceny w stosunku do bieżącej ceny instrumentu bazowego. Metody wyceny opcji podzielić można na dwie kategorie: metody parametryczne i metody nieparametryczne. Wśród metod parametrycznych wymienić można metodę drzew dwumianowych, model Blacka-Scholesa i metodę różnic skończonych. Metody nieparametryczne to np. sztuczne sieci neuronowe czy metoda regresyjnych wektorów nośnych (Cao i in. 2001; Huang i in. 2006).

Celem pracy jest analiza efektywności zastosowania sieci neuronowych i regresyjnych wektorów nośnych w wycenie opcji indeksowych (indeks WIG20) typu europejskiego notowanych na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych (WGPW).

Uzyskane wyniki mogą znaleźć zastosowanie praktyczne dla trzech grup podmiotów:

- a. animatorów (market makerów) odpowiedzialnych za aktywność na rynku opcji;
- b. specjalistów odpowiedzialnych za finanse w przedsiębiorstwach importujących lub eksportujących, którzy zajmują się zarządzaniem ryzykiem w tych firmach;
- c. inwestorów podejmujących decyzje dotyczące strategii zabezpieczania portfeli inwestycyjnych, w szczególności stosujących strategie opcyjne.

METODY I MATERIAŁ EMPIRYCZNY

Mimo że parametryczny model Blacka-Scholesa (Black i Scholes 1973) uznawany jest za jedno z najważniejszych osiągnięć w teorii finansów, badania empiryczne pokazują, że metoda ta nie jest odporna na określone obciążenia (Black i Scholes 1975). Ceny opcji kupna i sprzedaży w modelu Blacka-Scholesa wyznaczone są następująco:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$P = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

gdzie:

C, P – cena opcji odpowiednio kupna i sprzedaży,

S – cena instrumentu bazowego,

X – cena wykonania,

r – wolna od ryzyka stopa procentowa,

σ – zmienność ceny instrumentu bazowego,

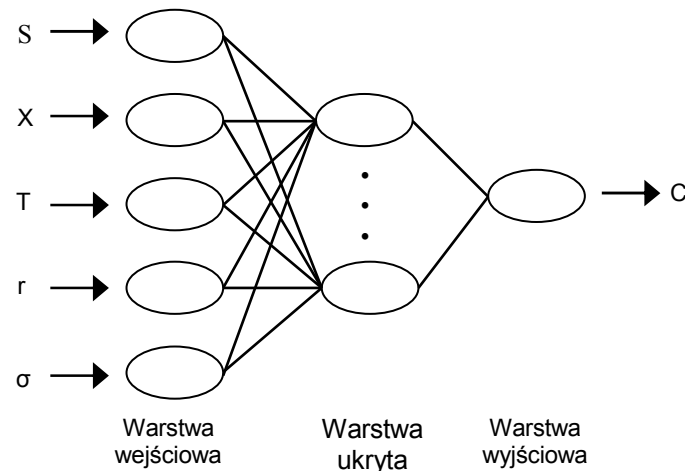
N – dystrybuanta standaryzowanej zmiennej o rozkładzie normalnym.

Najistotniejsze koncepcje dotyczące zagadnień związanych z instrumentami pochodnymi zawiera klasyczna, wielokrotnie wydawana książka Hulla (1999), natomiast wycenę opcji opisał m.in. Jakubowski i in. (2003). Szczegółowe rozważania dotyczące modeli wyceny opcji, takich jak: Blacka-Scholesa, drzewa dwu- i trzymianowe, metoda różnic skończonych, metoda Monte Carlo ujęli w pracy Korn i Korn (2000).

Badania dotyczące możliwości użycia sieci neuronowych wskazują na skuteczność takich rozwiązań. Hutchinson i in. (1994), Liu (1996), Amilon (2003), Binner i in. (2005), Lin i Yek. (2005) stosowali sieci neuronowe, uzyskując wyniki lepsze niż gdybyśmy stosowali tradycyjne modele stochastyczne. Przykładowy model zastosowania sieci neuronowej do wyceny opcji przedstawiono na rysunku 1. Tseng i in. (2008) badania przeprowadzili na trzech podzbiorach danych wyodrębnionych według kryterium opłacalności (S/X): ITM – $S/X > 1,02$, ATM – $0,95 \leq S/X \leq 1,02$ i OTM – $S/X < 0,95$.

Gradojevic i in. (2009) podzielili zbiór danych na części w zależności od przyjętych a priori parametrów: opłacalności (*moneyness*) i czasu do wygaśnięcia (tab. 1). Każdej części danych przypisali odpowiedni moduł sieci neuronowych, dzięki czemu uniknęli pułapek minimów lokalnych. Moduły uzyskano przez podzielenie a priori badanej przestrzeni zgodnie z przedstawio-

nymi poniżej parametrami τ (czas do wygaśnięcia/365) oraz S_t/K (cena instrumentu bazowego /cena wykonania).



Rys. 1. Neuronowy model wyceny opcji

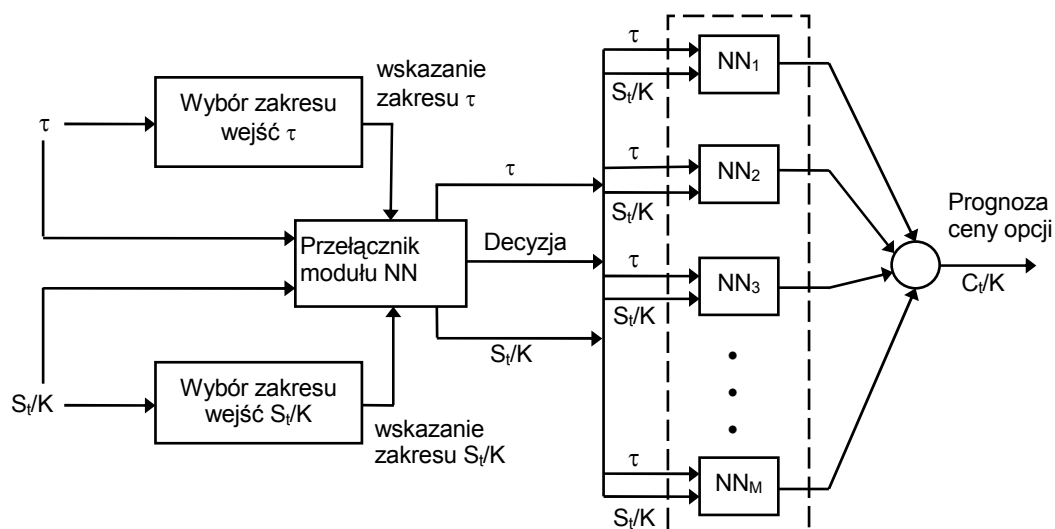
Źródło: Tseng i in. 2008, s. 3196.

Tabela 1. Zasady tworzenia modułów neuronowych

	$(S_t/K) < 0,97$	$0,97 \leq (S_t/K) \leq 1,05$	$(S_t/K) > 1,05$
$\tau < 0,1$	c_{1t} (moduł 1)	c_{2t} (moduł 2)	c_{3t} (moduł 3)
$0,1 \leq \tau \leq 0,2$	c_{4t} (moduł 4)	c_{5t} (moduł 5)	c_{6t} (moduł 6)
$\tau > 0,2$	c_{7t} (moduł 7)	c_{8t} (moduł 8)	c_{9t} (moduł 9)

Źródło: Gradojevic i in. 2009, s. 628.

Na podstawie tych rozważań zbudowano model zawierający dziewięć modułów sieci neuronowych, z których każdy w zależności od parametrów prognozował cenę europejskiej opcji kupna na indeks S&P-500 (rys. 2).



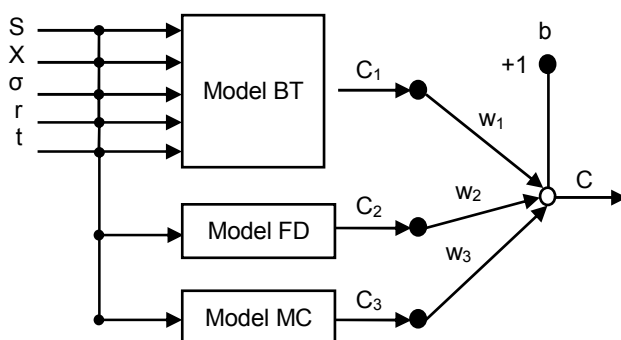
Rys. 2. Modułowy model wyceny opcji kupna

Źródło: Gradojevic i in. 2009, s. 628.

Kwestie definiowania opcji według opłacalności (*moneyness*) pojawiają się także w Andreou i in. (2008). Autorzy ci podają następującą terminologię dotyczącą opłacalności, w zależności od wartości ilorazu S/X :

- $S/X < 0,85$ VDOTM – bardzo głęboko nieopłacalne (VDOTM – *very deep out of the money*);
- $0,85 \geq S/X < 0,90$ – głęboko nieopłacalne (DOTM – *deep out the money*);
- $0,90 \geq S/X < 0,95$ – nieopłacalne (OTM – *out the money*);
- $0,95 \geq S/X < 0,99$ – lekko nieopłacalne (JOTM – *just out the money*);
- $0,99 \geq S/X < 1,01$ – na granicy opłacalności (ATM – *at the money*);
- $1,01 \geq S/X < 1,05$ – lekko opłacalne (JITM – *just in the money*);
- $1,05 \geq S/X < 1,10$ – opłacalne (ITM – *in the money*);
- $1,10 \geq S/X < 1,35$ – głęboko opłacalne (DITM – *deep in the money*);
- $S/X \geq 1,35$ – bardzo głęboko opłacalne (VDITM – *very deep in the money*).

Inne podejście zaproponowali Liang i in. (2009). Zastosowali oni do prognozowania cen opcji sieci neuronowe oraz regresyjne wektory nośne. W swoich badaniach porównali metody parametryczne z połączonymi kaskadowo parametrycznymi metody takimi jak: drzewa dwumianowe (BT), metoda różnic skończonych (FD), metoda Monte Carlo (MC), zwiększając możliwości modeli nieparametrycznych, takich jak – kolejno: liniowy model sieci neuronowej, wielowarstwowy model sieci neuronowej i model regresyjnych wektorów nośnych. Przykład takiego modelu dla liniowego modelu sieci neuronowej pokazano na rysunku 3.



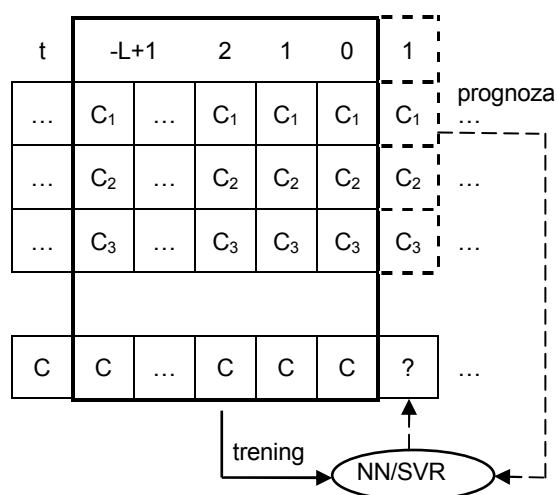
Rys. 3. Kaskadowy model wyceny opcji

Źródło: Liang i in. 2009, s. 3060.

gdzie: C_{1-3} – wycena opcji kupna dla modeli parametrycznych (odpowiednio BT, FD i MC); w_{1-3} – wagi przypisane odpowiednim modelom; b – odchylenie; C – wycena opcji kupna modelu kaskadowego.

Dotychczasowe badania wskazywały, że dane finansowe wykazują stacjonarność tylko w krótkim okresie. Jeżeli długość uczącego okna przesuwającego (*training sliding window*) jest zbyt duża, uczenie może nie wykazać odpowiedniego trendu na rynku. Z tego powodu badania przeprowadzono dla okien o długości $L = 3, 5, 8, 12, 17, 23$ (rys. 4).

W prognozach opcji kupna notowanych na giełdzie w Hongkongu najlepsze wyniki w badanym okresie (2006–2007) uzyskano dla okna $L=12$ oraz modeli wielowarstwowych sieci neuronowych i regresyjnych wektorów nośnych.



Rys. 4. Okno przesuwne

Źródło: Liang i in. 2009, s. 3059.

W połączeniu z sieciami neuronowymi stosowane są także inne metody. Lin i Yeh (2009) oraz Tseng i in. (2008) zastosowali grupy metod GARCH w celu prognozowania parametrów modelu wyceny opcji indeksowych giełdy tajwańskiej (TAIFEX) zbudowanego na modelu sieci neuronowych o propagacji wstecznej. Również Wang (2009) użył metod GARCH dla określenia zmienności instrumentu bazowego, podanego następnie jako wartość wejściowa modelu sieci neuronowej zastosowanej w celu prognozowania ceny opcji na giełdzie TAIFEX.

Dotychczasowe badania prowadzone były na rynkach o bardzo wysokiej płynności jeżeli chodzi o opcje (S&P500, TAIFEX) – odrzucano zwykle te obserwacje, które charakteryzowały się zbyt niskim poziomem obrotu.

W związku z tym, że badania empiryczne w niniejszej pracy dotyczą opcji indeksowych notowanych na WGPW, szczególną uwagę zwrócono na etap przygotowania danych: określenia metod normalizacji danych i metod zarządzania obserwacjami odstającymi i brakującymi.

W pracy zastosowano metody nieparametryczne: sieci neuronowe trenowane za pomocą algorytmu Rprop (NN) oraz regresyjne wektory nośne (SVR).

Proces uczenia sieci neuronowej można uogólnić, wyróżniając kilka etapów: analiza sieci neuronowej dla aktualnego wektora wejściowego, utworzenie sieci propagacji wstecznej, zastąpienie funkcji aktywacji ich pochodnymi, podanie na byłe wyjścia obecne wejścia, różnic między odpowiednimi wartościami uzyskanymi i wymaganymi, adaptacja wag na podstawie poprzednich etapów, kontynuacja uczenia dla wszystkich wektorów uczących do czasu spełnienia warunku zatrzymania.

Nazwa algorytmu RPROP (Riedmiller i Branz 1992) pochodzi od ang. *Resilient Backpropagation*. Podstawowym założeniem tej metody jest eliminacja szkodliwego wpływu wielkości pochodnych cząstkowych. Dlatego rozważany jest tylko znak pochodnej, na podstawie którego określany jest kierunek zmian wag. Wielkość zmian wag wyznaczana jest za pomocą czynnika: $\Delta_{ij}^{(t)}$

$$\Delta w_{ij}^{(t)} = \begin{cases} -\Delta_{ij}^{(t)} & \text{gdy} & \frac{\partial E^{(t)}}{\partial w_{ij}} > 0 \\ +\Delta_{ij}^{(t)} & \text{gdy} & \frac{\partial E^{(t)}}{\partial w_{ij}} < 0 \\ 0 & \text{w innym przypadku} \end{cases}$$

$$\Delta_{ij}^{(t)} = \begin{cases} \eta^+ \cdot \Delta_{ij}^{(t-1)} & \text{gdy} & \frac{\partial E^{(t-1)}}{\partial w_{ij}} \cdot \frac{\partial E^{(t)}}{\partial w_{ij}} > 0 \\ \eta^- \cdot \Delta_{ij}^{(t-1)} & \text{gdy} & \frac{\partial E^{(t-1)}}{\partial w_{ij}} \cdot \frac{\partial E^{(t)}}{\partial w_{ij}} < 0 \\ \Delta_{ij}^{(t-1)} & \text{w innym przypadku} \end{cases}$$

gdzie:

$\frac{\partial E^{(t)}}{\partial w_{ij}}$ – gradient po wszystkich wzorcach uczących,

η^+, η^- – maksymalna i minimalna wartość współczynnika uczenia.

Algorytm RPROP znacznie przyspiesza proces uczenia w obszarach, gdzie nachylenie funkcji błędu jest niewielkie. Podstawą tej metody jest ciągły wzrost współczynnika uczenia, gdy dla dwu kolejnych kroków znaki gradientu są takie same, a także zmniejszenie wartości współczynnika, gdy znaki te są różne.

Maszyny wektorów nośnych (SVM – *support vector machines*) to grupa metod rozwijanych przez Vapnika i jego współpracowników (Boser i in. 1992; Cortes i Vapnik 1995; Vapnik i in. 1997) początkowo do rozwiązywania zadań klasyfikacji. Nazwą tą określa się grupę metod uczenia maszynowego, jak i model matematyczny (Vapnik i Chervonenkis 1964), który one realizują. Metoda regresyjnych wektorów nośnych (SVR – *support vector regression*) to grupa metod będących rozwinięciem metod SVM, stosowanych w problemach regresji i prognozowania szeregów czasowych (Smola i Scholkopf 2004).

W pracy zastosowano algorytm ε -SVR z radialną funkcją jądrową. Algorytm ten formułowany jest jako minimalizacja następującego funkcjonału:

$$H(f) = \sum_{i=1}^m \frac{C}{m} |y_i - f(x_i)|_{\varepsilon} + \frac{1}{2} \|f\|_K^2$$

gdzie:

$|y_i - f(x_i)|_{\varepsilon} = \max\{0, |y_i - f(x_i)| - \varepsilon\}$;

$\|f\|_K^2$ – norma f w przestrzeni Hilberta;

C – współczynnik kary, tylko wektory spoza zakresu 2ε spełniają warunki funkcji kosztu, parametry C i 2ε są optymalizowane dla każdego problemu;

m – rozmiar zbioru uczącego.

Rozwiązanie funkcji $f(x)$ dane jest w postaci:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x, x_i) + \beta_0$$

gdzie:

$\alpha_i, \alpha_i^* \in [0, C]$ – mnożniki Lagrange'a;

$K(x, x_i) = \exp\left(-\frac{\|x - x_i\|^2}{2\sigma^2}\right)$ – funkcja jądrowa o radialnych funkcjach bazowych (RBF – *radial basis function*);

β_0 – odchylenie.

β_0 – odchylenie.

Wartość $\sum_{i=1}^m (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0$, dlatego suma wszystkich wag również musi wynosić zero.

Wektor nośny ma wagę niezerową, stąd predykcja etykiet nieznannej próbki obliczana jest za pomocą ważonego podobieństwa do zbioru wektorów nośnych.

Ocena jakości modeli przeprowadzona zostanie przez porównanie następujących miar błędów: błąd średniokwadratowy (*RMSE*), średni błąd bezwzględny (*MAE*).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y - x)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum |y - x|$$

gdzie:

x – wartość rzeczywista,

y – wartość prognozowana,

n – liczba obserwacji.

Materiał badawczy stanowiły pozycje literaturowe uzyskane przez kwerendy w bazach danych: EBSCOhost; Emerald, ProQuest, ScienceDirect. Materiał empiryczny stanowiły dane liczbowe: kursy giełdowe opcji kupna na indeks WIG20 oraz indeksu WIG20, stopy procentowe wolne od ryzyka, zmienność historyczna oraz implikowana.

WYNIKI I DYSKUSJA

Zbiór danych obejmuje okres od marca 2011 do grudnia 2012 roku i zawiera cztery serie opcji kupna (C, F, I, L). Dane zostały przefiltrowane z zastosowaniem odpowiednio zaadaptowanych reguł podanych przez Andreou i in. (2008). Wyeliminowano obserwacje, dla których $0,90 > S/X > 1,10$ oraz czas do wygaśnięcia/365 (τ), spełniające warunki $0,2 > \tau < 0,01$. Obliczenia BS i NN przeprowadzono za pomocą odpowiednich pakietów (toolboksów) programu Matlab, natomiast do obliczeń SVR zastosowano zewnętrzną bibliotekę LIBSVM, którą również uruchamiano w Matlabie (Chang i Lin 2011.).

Metodę odniesienia stanowił model Blacka-Scholesa (BS). Obliczenia w modelu BS, jak i zadania optymalizacyjne za pomocą modeli nieparametrycznych NN i SVR, przeprowadzono kolejno dla dwóch wartości zmienności: historycznej (ZH) i implikowanej (ZI). Każdy z podzbiorów danych obejmujących jedną z czterech serii podzielono na zestaw treningowy (70%) i testowy (30%). Obliczenia dla BS przeprowadzono tylko na danych testowych określonych dla modeli nieparametrycznych. Wartości błędów RMSE i MAE podano w tabeli 2.

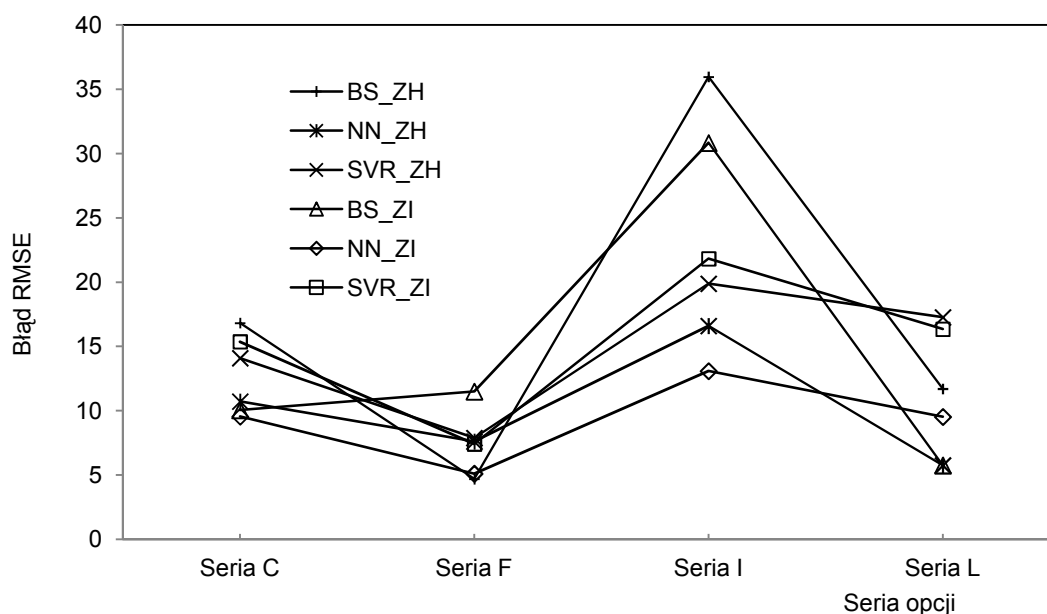
Tabela 2. Miary błędów dla badanych modeli – dane testowe

	BS_ZH	NN_ZH	SVR_ZH	BS_ZI	NN_ZI	SVR_ZI
Seria C						
RMSE	16,83	10,72	14,1	10,05	9,56	15,37
MAE	14,29	8,01	11,04	8,34	6,87	12,33
Seria F						
RMSE	4,70	7,61	7,89	11,5	5,11	7,42
MAE	3,70	5,67	4,23	9,68	3,46	4,35
Seria I						
RMSE	35,97	16,6	19,89	30,83	13,09	21,83
MAE	21,04	10,96	14,9	20,77	8,89	15,39
Seria L						
RMSE	11,71	5,76	17,27	5,76	9,53	16,35
MAE	9,13	4,44	14,08	4,45	6,67	12,84
Średnia						
RMSE	17,30	10,17	14,78	14,53	9,32	15,24
MAE	12,04	7,27	11,06	10,81	6,47	11,22

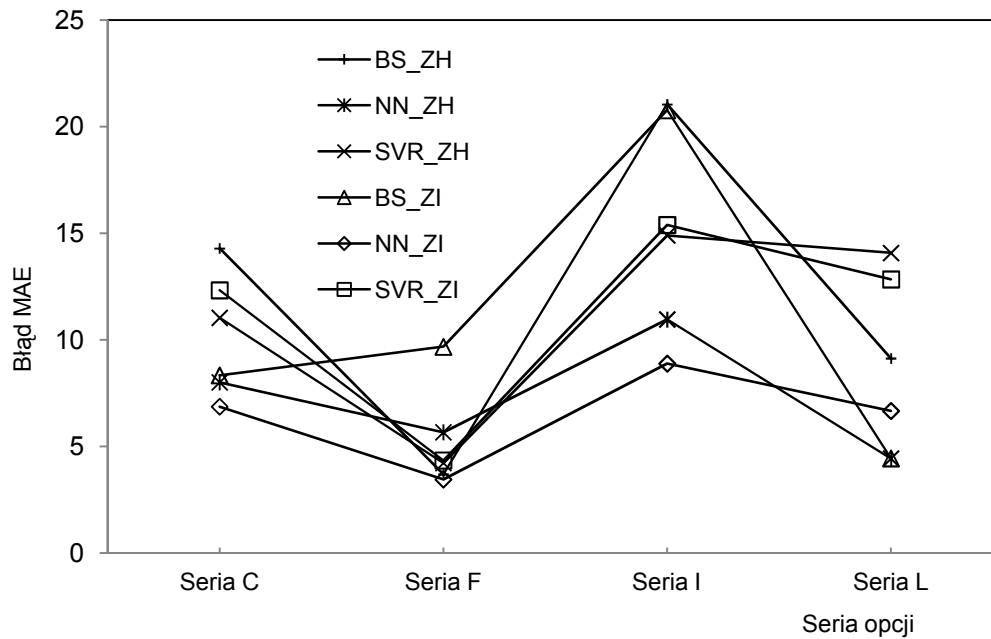
Uzyskane wyniki wskazują, że modele wyceny oparte na sieciach neuronowych dawały wyniki obciążone najmniejszymi błędami RMSE i MAE. Wyniki te wskazywały sieci neuronowe jako atrakcyjne narzędzie zarówno dla modeli zasilanych zmiennością implikowaną (NN_ZI: RMSE = 9,32.17; MAE = 6,47), jak i historyczną (NN_ZH: RMSE = 10,17; MAE = 7,27).

Metoda SVR, mimo że mniejsze błędy RMSE i MAE, niż dla modelu odniesienia BS, uzyskano tylko dla modeli ze zmiennością historyczną (SVR_ZH: RMSE = 14,78; MAE = 11,06), wyróżniała się szybkością działania.

Zastosowany model Blacka-Scholesa dobrze sprawdził się dla danych zasilanych zmiennością implikowaną (BS_ZI: RMSE = 14,53; MAE = 10,81). Wprowadzone wartości błędów tylko nieznacznie odbiegały od wartości uzyskanych za pomocą SVR_ZI (RMSE = 15,24; MAE = 11,22), ale dla serii L uzyskano najlepsze wyniki, w porównaniu z pozostałymi modelami.

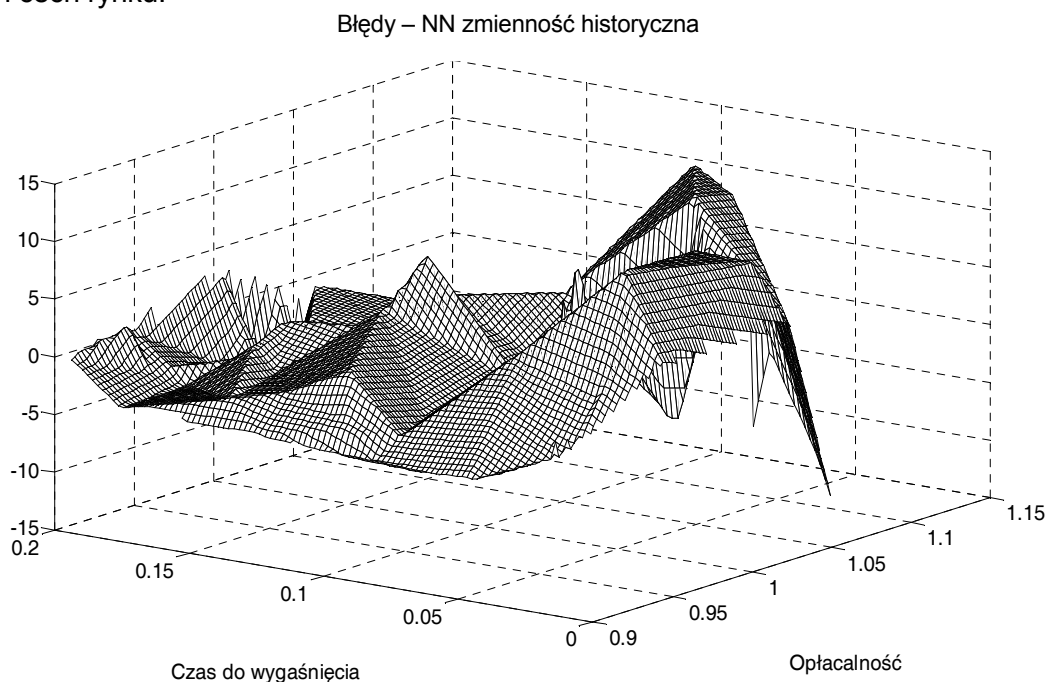


Rys. 5. Błędy RMSE dla badanych modeli i serii opcji

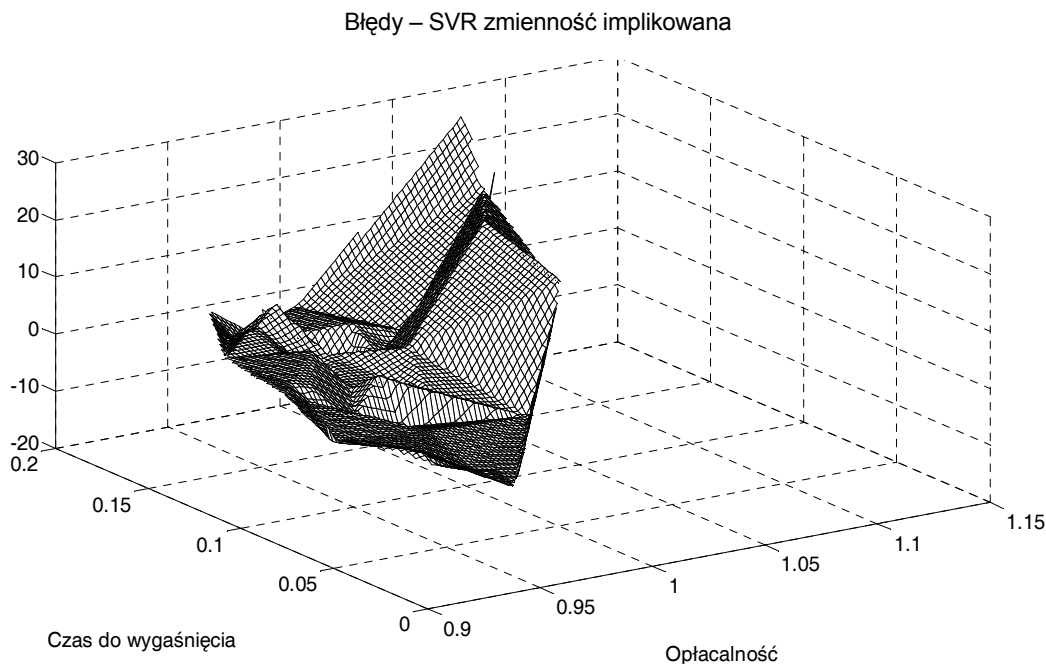


Rys. 6. Błędy MAE dla badanych modeli i serii opcji

Należy zwrócić uwagę, że różnice między uzyskanymi wycenami a wartościami rynkowymi wystąpiły w zależności od opłacalności i czasu do wygaśnięcia (rys. 5–6). W obu prezentowanych przykładach błędy zwiększały się po przekroczeniu S/X powyżej 1,02 – opcje ITM. W przypadku modelu SVR zauważalny jest również wzrost wartości błędów w terminach bliskich wygaśnięcia. Wyniki te świadczą o potrzebie tworzenia modeli opartych na modułach uczonej maszyny (NN, SVR), tworzących przestrzeń do zaprogramowania charakterystycznych cech rynku.



Rys. 5. Zmiany błędów wyceny modelu NN_ZH



Rys. 6. Zmiany błędów wyceny modelu SVR_ZI

PODSUMOWANIE

W pracy porównano efektywność dwóch metod uczenia maszynowego: sieci neuronowych (NN) i regresyjnych wektorów nośnych (SVR), dla których modelem odniesienia był model Blacka-Scholesa (BS). Badane modele zastosowano do wyceny opcji kupna na indeks WIG20.

Przeprowadzona analiza efektywności wskazuje, że modele nieparametryczne, takie jak sieci neuronowe i regresyjne wektory nośne stanowią skuteczną alternatywę wobec klasycznych modeli parametrycznych (BS). W szczególności modele działające w oparciu na sieciach neuronowych oraz wykorzystujące zmienność implikowaną (NN_ZI) dały bardzo dobre wyniki.

Uwagę należy zwrócić na odpowiednie przygotowanie danych, tj. na selekcję ze względu na opłacalność (*moneyness*) i czas do wygaśnięcia (*maturity*). Podział ten umożliwił przeprowadzenie obliczeń dla modułów zawierających dodatkową wiedzę o rynku.

PIŚMIENICTWO

- Amilon H.** 2003. A neural network versus Black-Scholes: a comparison of pricing and hedging performances, *J. Forecast.*, 22, 317–35.
- Andreou P., Charalambous C., Martzoukos S.** 2008. Pricing and trading European options by combining artificial neural networks and parametric models with implied parameters, *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 185, Mar., 1415–1433.
- Binner J.M., Bissoondeal R.K., Elger T., Gazely A.M., Mullineux A.W.** 2005. A comparison of linear forecasting models and neural networks: an application to Euro inflation and Euro Divisia, *Appl. Econ.*, 37, 665–680.
- Black F., Scholes M.** 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Politic. Econ.* 81 (3), 637–654.
- Black F., Scholes M.** 1975. Fact and fantasy in the use of options. *Financ. Anal. J.* 31, 36–41 i 61–72.
- Boser B.E., Guyon I., Vapnik V.N.**, 1992. A training algorithm for optimal margin classifiers, w: *Proceedings of the Fifth Annual Workshop of Computational Learning Theory.* 5, ACM. 144–152.
- Cao L.J., Tay F.E.H.** 2001. Financial forecasting using support vector machines, *Neural Comput. Appl.* 10, 184–192.

- Chang C.-C., Lin C.-J.** 2011. LIBSVM: A library for support vector machines. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, vol. 2, no. 3, 1–27.
- Cortes C., Vapnik V.** 1995. Support-Vector Networks. *Mach. Lear.* vol. 20, no. 3, 273–297.
- Gradojevic N., Gençay R., Kukolj D.** 2009. Option pricing with modular neural networks. *IEEE transactions on neural networks*, vol. 20, no. 4, 626–637.
- Huang S.-C., Wu T.-K.** 2006. A hybrid unscented Kalman filter and support vector machine model in option price forecasting. *Lect. Notes Comp. Sci.*, vol. 4221, 303–312.
- Hull J.**, 1999. *Kontrakty terminowe i opcje*. Wprowadzenie. WIG-Press, Warszawa ISBN 83-8701-447-8.
- Hutchinson J.M., Lo A.W., Poggio T.** 1994. A nonparametric approach to pricing and hedging derivative securities via learning networks. *J.Fin.*, 49, 851–859.
- Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł.** 2003. *Matematyka Finansowa, Instrumenty pochodne*, WNT. ISBN 83-204-2807-6.
- Korn R., Korn E.** 2000. *Option Pricing and Portfolio Optimization. Modern Methods of Financial Mathematics*, Am. Math. Soc. Providence, Rhode Island. ISBN 0-8218-2123-7.
- Liang X., Zhang H., Xiao J., Chen Y.** 2009. Improving option price forecasts with neural networks and support vector regressions. *Neurocomputing*, vol. 72, no. 13–15, 3055–3065
- Lin C.T., Yeh H.Y.** 2005. The valuation of Taiwan stock index option prices—comparison of performances between Black-Scholes and neural network model, *J. Stat. Manag. Syst.*, 8, 355–367.
- Lin C.T., Yeh H.Y.** 2009. Empirical of the Taiwan stock index option price forecasting model – applied artificial neural network, *Appli. Econ.*, vol. 41, Jun. 2009, 1965–1972.
- Liu M.** 1996. Option pricing with neural networks w: *Progress in Neural Information Processing*, Red. S.I. Amari, L. Xu, L.W. Chan, I. King, i K.S. Leung. Springer-Verlag, vol. 2, 760–765.
- Riedmiller M., Braun H.** 1992. A fast adaptive learning algorithm. Technical Report, University Karlsruhe, Germany.
- Smola A.J., Scholkopf B.** 2004. A tutorial on support vector regression. *Stat. Comp.*, vol. 14, no. 3, 199–222.
- Tseng C., Cheng S., Wang Y., Peng J.** 2008. Artificial neural network model of the hybrid EGARCH volatility of the Taiwan stock index option prices, *Physica A: Stat. Mech. Appli.*, vol. 387, May, 3192–3200.
- Wang Y.** 2009. Nonlinear neural network forecasting model for stock index option price: Hybrid GJR–GARCH approach. *Exp. Syst. Appli.*, vol. 36, Jan, 564–570.
- Vapnik V., Golowich S., Smola A.** 1997. Support vector method for function approximation, regression estimation, and signal processing. in: Mozer M.C., Jordan M.I., and Petsche T. (Eds.) *Advances in Neural Information Processing Systems 9*, MA, MIT Press, Cambridge, 281–287.
- Vapnik V., Chervonenkis A.** 1964. A note on one class of perceptrons. *Automation and Remote Control*, 25.